Lei 8,05

A. Hollinger

E. Georgescu-Buzău

Elemente de algebră superioară

Manual pentru anul IV liceu, secția reală și licee de specialitate

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

Editura didactică și pedagogică — București, 1977

A. Hollinger
profesor emerit

E. Georgescu-Buzău
profesor

Elemente de algebră superioară

Manual pentru anul IV liceu, secția reală

și licee de specialitate

Editura didactică și pedagogică, București

Manualul a fost realizat în 1969 și elaborat astfel:
A. Hollinger — capitolele I—IV
E. Georgescu-Buzău — capitolul V

Referenți: conf. univ. Ion D. Ion
prof. Tr. Rădulescu
Redactor: prof. Valentin Radu
Tehnoredactor: Constanța Velcovici

Coperta: N. Sîrbu

Polinoame

1.0. Introducere

În primele patru capitole ale acestui manual se tratează ecuațiile algebrice, adică ecuațiile de forma $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este un polinom. De aceea este necesar să reluăm noțiunea de polinom, cunoscută din clasele anterioare, pentru a aduce unele precizări și completări.

1.1. Precizări și completări

1.1.1. **Noțiunea de polinom.** După cum se știe, expresii ca

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 7x + 10,$$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + x - 2y + 6,$$

$$P(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - xy + 2yz + x + y - 10$$

se numesc polinoame. Primul este un polinom cu o singură variabilă, al doilea — cu două, iar al treilea — cu trei variabile.

În acest manual vor interveni numai polinoame cu o singură variabilă, pe care le vom numi, scurt, polinoame. Deci, un polinom este o expresie de forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

în care coeficienții $a_i (i = 0,1,2, \ldots, n)$ sînt numere întregi, raționale, reale sau complexe, n este un număr natural, iar x este o variabilă care parcurge o mulțime numerică determinată, Z, Q, R sau C.

Un polinom este un simbol care indică un *șir de operații* (ridicări la putere, înmulțiri și adunări) ce se fac cu o valoare a variabilei (necunoscutei) și cu coeficienții. Astfel, polinomul $3x^2 - 5x + 8$ indică următoarele operații: numărul x (rațional, real sau complex) se ridică la pătrat și se înmulțește cu 3; același număr se înmulțește cu (-5), și produsul se adună cu primul; rezultatul se adună cu 8.

1.1.2. **Exemple.** a) $P(x) = 3x^5 - \frac{2}{5}x^4 + \pi x^2 - \sqrt{3}x + 4$ este un polinom cu coeficienți reali, $a_0 = 3$, $a_1 = -\frac{2}{5}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \pi$, $a_4 = -\sqrt{3}$, $a_5 = 4$. (Termenii cu coeficientul zero nu se scriu.)

b) $Q(x) = ix^3 - 7x^2 + (1 - i\sqrt{3})x + 4$

este un polinom cu coeficienți complecși, $a_0 = i$, $a_1 = -7$, $a_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $a_3 = 4$. (Numerele -7 și 4 sînt privite ca numere complexe: $-7 = -7 + 0i$, $4 = 4 + 0i$.)

1.1.3. **Mulțimea cărcia îi aparțin coeficienții unui polinom și variabila.** Spre deosebire de felul cum se procedează de cele mai multe ori în clasele mai mici, cînd coeficienții sînt literali, trebuie să se precizeze totdeauna cărei mulțimi numerice îi aparțin (Z, Q, R, C). Acest lucru este necesar din motivul următor.

Polinoamele cu coeficienți dintr-o mulțime mai restrînsă au unele proprietăți pe care nu le au polinoamele ai căror coeficienți aparțin unei mulțimi mai cuprinzătoare. Astfel, polinoamele cu coeficienți reali au unele proprietăți pe care nu le au polinoamele cu coeficienți complecși, după cum polinoamele cu coeficienți raționali au unele proprietăți pe care nu le au polinoamele cu coeficienți reali ș.a.m.d.

Cît despre mulțimea pe care o parcurge variabila, ea este de obicei aceeași ca mulțimea cărcia îi aparțin coeficienții sau mai cuprinzătoare. Deoarece $Z \subset Q \subset R \subset C$, se poate considera totdeauna că coeficienții ecuației aparțin mulțimii în care variabila ia valori.

În primele două capitole ale acestei cărți vom trata polinoame cu coeficienți complecși, în care variabila ia valori complexe. Pentru a ține prezent în minte acest lucru, vom folosi pentru variabilă litera z. Dat fiind că $Z \subset Q \subset R \subset C$, tot ce vom spune rămîne valabil și pentru polinoame cu coeficienții în oricare din aceste mulțimi, cu condiția ca variabila să ia valori complexe.

1.1.4. **Gradul unui polinom.** Polinomul

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$$

este de gradul n, dacă $a_0 \neq 0$.

Polinoamele de la 1.1.2 au, respectiv, gradele 5 și 3.

Condiția $a_0 \neq 0$ este esențială. De exemplu, polinomul

$$0z^4 + 0z^3 + 5z^2 - 3z + 8$$

este de gradul 2, nu 4.

Coeficientul $a_n = a_nz^0$ se numește *termenul liber* al polinomului. Un polinom poate fi format numai din termenul său liber. De exemplu polinomul 3, care este același polinom ca

$$0z + 3,\ 0z^2 + 0z + 3,\ \ldots,\ 0z^n + 0z^{n-1} + \ldots + 0z + 3.$$

Gradul unui asemenea polinom este zero.

Vom considera și polinomul special, notat cu P^*,

$$P^* = 0z^n + 0z^{n-1} + \ldots + 0z + 0,$$

cum ar fi: $0z + 0$ sau $0z^2 + 0z + 0$ ș.a.m.d., în care toți coeficienții sînt nuli. Acest polinom se numește *polinomul nul*. El nu are grad.

Gradul unui polinom joacă uneori rolul pe care-l joacă „mărimea" unui număr real (v. problema 30).

1.1.5. **Operații cu polinoame.** Regulile după care se fac aceste operații sînt cunoscute din clasele anterioare. Motivul pentru care s-au format tocmai aceste reguli, nu altele, va fi arătat mai departe (1.1.8.). Aici ne mărginim să menționăm că ele sînt valabile și în cazul polinoamelor cu coeficienți complecși.

1.1.6. **Gradul sumei și al produsului.** Fie P un polinom de gradul m și Q un polinom de gradul n,

$$\text{gr. } P = m, \quad \text{gr. } Q = n.$$

a) Dacă $m > n$, gradul sumei $P + Q$ este m, căci primul termen al sumei este primul termen din P. Dacă însă $m = n$, gradul sumei este egal cu gradul lor sau mai mic, căci se poate ca primul termen, sau primii doi termeni etc. să se reducă.

Același lucru se poate spune despre gradul diferenței $P - Q$. În adevăr, $P - Q = P + (-Q)$, căci pentru a scădea Q din P se adună P cu polinomul care se obține schimbînd semnele tuturor coeficienților polinomului Q, iar gr. $(-Q) =$ gr. Q.

Așadar,

$$\text{gr. } (P \pm Q) \leqslant \max.\ (\text{gr. } P, \text{gr. } Q)^*.$$

b) Gradul produsului lor este $m + n$. În adevăr, dacă $P = a_0z^m + \ldots$, $Q = b_0z^n + \ldots$, atunci $PQ = a_0b_0z^{m+n} + \ldots$

1.1.7. **Funcția-polinom.** Considerăm, de exemplu, polinomul

$$2z^2 - 5z + 7.$$

El indică un șir de operații care duc, pentru fiecare valoare a lui z, la un număr bine determinat, dar în algebra elementară nu se arată precis care sînt toate valorile pe care le poate lua z. Dacă se precizează care este mulțimea E a valorilor pe care le poate lua z, de exemplu $E = \{1, 2, 3\}$, se poate defini o funcție $P : E \to R$ dată de relația

$$P(z) = 2z^2 - 5z + 7.$$

---

* a și b fiind două numere reale, prin max. (a, b) se înțelege cel mai mare dintre numerele a și b. Dacă $a = b$, max. $(a, b) = a = b$.

De exemplu: max. $(3, 4) = 4$, max. $(2, 2) = 2$. Un sens analog are simbolul min. (a, b).

Calculul dă:

$$P(1) = 4, \quad P(2) = 5, \quad P(3) = 10.$$

În acest exemplu, s-a dat un polinom (cu coeficienți întregi) și cu ajutorul lui am definit o funcție. Același lucru se poate face în cazul oricărui polinom, dar mulțimea de definiție nu se ia la întîmplare. Prezintă interes cazul în care se ia ca mulțime de definiție una dintre mulțimile Z, Q, R sau C. Funcțiile astfel definite se numesc *funcții-polinom* sau *funcții polinomiale.*

Exemple. 1) Cu ajutorul polinomului $z^2 + 3iz - 4$, cu coeficienți complecși, se poate defini funcția

$$P : C \to C, \text{ dată de relația } P(z) = z^2 + 3iz - 4.$$

2) Cu ajutorul polinomului cu coeficienți reali $x^3 - 5x + \sqrt{2}$ se pot defini funcțiile

$$P_1 : R \to R, \text{ cu } P_1(x) = x^3 - 5x + \sqrt{2} \ (x \in R)$$

și

$$P_2 : C \to C, \text{ cu } P_2(z) = z^3 - 5z + \sqrt{2} \ (z \in C).$$

3) Cu ajutorul polinomului cu coeficienți întregi $x^4 - 3x + 4$ se pot defini funcțiile:

$$P_1 : Z \to Z, \quad P_2 : Q \to Q, \quad P_3 : R \to R \text{ și } P_4 : C \to C,$$

prin relația $P_i(x) = x^4 - 3x + 4$, $i = 1, 2, 3, 4$, unde x parcurge respectiv una dintre mulțimile Z, Q, R sau C.

Cazul cel mai important pentru teoria ecuațiilor algebrice este cel al polinoamelor cu coeficienți reali în care variabila ia valori complexe.

O funcție-polinom este o funcție $P : M \to M$, unde M este una dintre mulțimile Z, Q, R sau C, dată de o relație de forma

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in M.$$

Exemplele de mai sus se încadrează în această definiție, deși acolo mulțimea în care funcția ia valori a fost uneori mai cuprinzătoare decît mulțimea căreia îi aparțin coeficienții, căci se poate considera că coeficienții aparțin mulțimii mai cuprinzătoare. Astfel, în cazul în care polinomul are coeficienți reali, iar variabila ia valori complexe, putem considera coeficienții ca numere complexe ($R \subset C$).

Deosebirea dintre funcția polinomială și polinom este următoarea: o funcție P este definită cînd se dau mulțimea de definiție E, mulțimea F în care funcția ia valori și un *procedeu* prin care se asociază fiecărui element x din E un element unic $P(x)$ din F. Polinomul, ca expresie algebrică, este numai al treilea dintre aceste elemente: el ne dă numai procedeul prin care se află pentru fiecare element $x \in E$ elementul corespunzător $P(x)$ din F.

Pentru prescurtare, se spune *polinom* în loc de *funcție-polinom*, deci *valoarea polinomului* în loc de *valoarea funcției-polinom.*

1.1.8. **Operații cu polinoame, operații cu funcții-polinom.** Acum putem arăta care este sensul regulilor de calcul cu polinoame (v. 1.1.5.).

După cum se știe, două funcții f și g sînt egale cînd sînt definite pe aceeași mulțime M și valorile lor pentru aceleași valori ale variabilei sînt aceleași:

$$[f = g] \Leftrightarrow [\forall x, \ x \in M \text{ și } f(x) = g(x)]^*.$$

Cu alte cuvinte, două funcții egale sînt una și aceeași funcție.

*Regulile de calcul cu polinoame sînt astfel întocmite încît să dea funcții egale***.*

De exemplu:

$$(2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3.$$

Se spune că expresiile care figurează de o parte și de alta a semnului „=" au aceeași „valoare numerică" oricare ar fi valoarea lui x.

Sensul precis al acestei relații este următorul:

Se dau polinoamele $2x + 1$ și $x - 3$. Apoi se consideră funcțiile:

$$A : R \to R, \ A(x) = 2x + 1, \quad B : R \to R, \ B(x) = x - 3,$$

$$P : R \to R, \ P(x) = 2x^2 - 5x - 3.$$

Regula de înmulțire a polinoamelor ne garantează că, oricare ar fi $x \in R$,

$$A(x)B(x) = P(x).$$

---

* Simbolul $\forall$ se citește: „*oricare ar fi*" sau: „*pentru orice*". De exemplu, $\forall x$, $x \in M$... se citește: „*oricare ar fi* x, x aparținînd lui M..." sau: „*pentru orice* x, x aparținînd lui M...". Pentru prescurtare, se poate citi: „*oricare ar fi* x *din* M..."

Simbolul $\exists$ se citește: „*există* (cel puțin) *un*". De exemplu, $\exists c$, $c \in Z$, astfel încît să avem $a = bc$ se citește: „*există un* c aparținînd lui Z astfel încît..."

Simbolul $\forall$ se numește *cuantificator universal*, iar simbolul $\exists$ se numește *cuantificator existențial.*

** Acest lucru nu este adevărat pentru orice calcul algebric. De exemplu

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}.$$

Aceste două fracții nu au aceeași valoare pentru „orice valoare" a lui x. Pentru $x = 1$, prima n-are sens, iar a doua are o valoare bine determinată $\frac{1}{2}$.

Situația este analoagă în cazul celorlalte operații cu polinoame. Pentru a exprima că procedeele indicate de două expresii algebrice definesc aceeași funcție (dacă se ia aceeași mulțime de definiție) vom folosi cuantificatorul universal $\forall$ și vom preciza care este mulțimea de definiție. Vom scrie, de exemplu,

$$\forall x,\ x \in R\ (2x + 1)\ (x - 3) = 2x^2 - 5x - 3.$$

Această afirmație este echivalentă cu următoarea: funcțiile $f : R \to R,\ f(x) = (2x + 1)\ (x - 3)$ și $g : R \to R,\ g(x) = 2x^2 - 5x - 3$ sînt egale.

Pentru prescurtare, vom renunța de multe ori la cuantificatorul $\forall$ dar vom menționa că este vorba de o identitate*; mulțimea în care variabila ia valori va fi subînțeleasă.

1.1.9. **Observare despre simbolul** $P(x)$. Pentru a ne conforma unui obicei înrădăcinat, vom folosi simbolul $P(x)$ sau $P(z)$ cu două semnificații. Pe de o parte $P(z)$ reprezintă polinomul însuși, ca expresie algebrică, care indică un șir de operații. De exemplu,

$$P(z) = 2z^2 - 5z - 3.$$

Aici $P(z)$ este un simbol care reprezintă unul și același lucru cu expresia $2z^2 - 5z - 3$.

Pe de altă parte, $P(z)$ reprezintă valoarea funcției corespunzătoare $P : C \to C$ pentru o valoare oarecare z a argumentului. În acest sens se scrie „ecuația $P(z) = 0$".

Un polinom, ca șir de operații, nu poate fi egal cu zero sau cu un alt număr; valoarea funcției respective poate fi egală cu zero. De exemplu, forma generală a unei ecuații în care ambele părți sînt polinoame (de exemplu: $2z^2 + z = z^2 - z - 3$) este

$$P(z) = Q(z).$$

Aici nu polinoamele sînt egale — două polinoame egale sînt unul și același polinom — ci valorile celor două funcții — polinom pentru o valoare a argumentului care urmează să fie determinată sînt egale.

1.2. Polinoame identice

1.2.1. **Polinoame egale, polinoame identice.** a) Orice expresie algebrică indică un șir de operații. Atunci două expresii algebrice, în special două polinoame, sînt egale dacă indică aceleași operații; ele sînt una și aceeași expresie scrisă de două ori. De exemplu, polinomul $3z^2 - 5z + 2$ indică operațiile: ridicarea lui z la pătrat, înmulțirea lui z^2 cu 3 ș.a.m.d. Polinomul $az^2 + bz + c$ ne indică aceleași operații dacă și numai dacă $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$, și numai în acest caz cele două polinoame sînt egale.

În general, polinoamele

$$a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m \quad \text{și} \quad b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n$$

sînt egale dacă și numai dacă $m = n$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_m = b_n$.

b) Pe de altă parte orice polinom ne dă un procedeu care poate intra în definiția unei funcții. De exemplu, cu ajutorul polinomului $3z^2 - 5z + 2$ se poate defini funcția $P : C \to C$ dată de relația $P(z) = 3z^2 - 5z + 2$. Două polinoame care definesc aceeași funcție se numesc *polinoame identice*.

Sensul precis al acestei afirmații este următorul. Fie

$$a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m \quad \text{și} \quad b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n$$

două polinoame cu coeficienții complecși și z o variabilă complexă. Aceste polinoame sînt identice dacă și numai dacă funcția $P : C \to C$ dată de relația

$$P(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m$$

este egală cu funcția $Q : C \to C$ dată de relația

$$Q(z) = b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Este evident că două polinoame egale sînt identice. Se pune problema *dacă și reciproca acestei propoziții este adevărată*, adică: fiind dată, de exemplu, funcția:

$$P : C \to C,\ P(z) = z^3 - 5z + 2,$$

există și un polinom $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ diferit de $z^3 - 5z + 2$ astfel încît funcția

$$Q : C \to C,\ Q(z) = a_0z^n + a_iz^{n-1} + \ldots + a^n$$

să fie egală cu funcția P? În cazul expresiilor algebrice sau trigonometrice oarecare, răspunsul este negativ. De exemplu, funcțiile

$$f : R \to R,\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{și}$$

$$g : R \to R,\ g(x) = \sqrt{2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1}}$$

sînt egale, după cum se poate verifica ridicînd ambele expresii la pătrat (ele sînt pozitive pentru orice valoare a lui x).

De asemenea, funcțiile

$f : R \to R,\ f(x) = \sin 2x$ și $g : R \to R,\ g(x) = 2 \sin x \cos x$ sînt egale, deși expresiile $\sin 2x$ și $2 \sin x \cos x$ sînt diferite.

* În unele cărți se folosește semnul „$\equiv$" Acest semn trebuie evitat din două motive. Primul: el nu este destul de precis, prin faptul că nu se arată ce se înțelege prin „orice valoare"; al doilea: el nu se folosește în mod consecvent; el ar trebui folosit la cele mai multe calcule algebrice și în trigonometrie. De exemplu, ar trebui scris $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, ceea ce de obicei nu se face.

În cele ce urmează, vom trata această problemă, care este fundamentală pentru teoria operațiilor cu polinoame. Vom trata întîi cazul particular cînd funcția definită de un polinom este funcția constantă zero.

1.2.2. **Polinom identic nul.** a) *Definiție.* Fie

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$$

un polinom cu coeficienți complecși.

> Polinomul $P(z)$ este identic nul dacă și numai dacă valoarea sa este zero pentru orice valoare complexă a lui z.

Cu alte cuvinte, polinomul $P(z)$ este identic nul dacă și numai dacă funcția $P : C \to C$ definită prin relația

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$$

este funcția constantă $P(z) = 0$*.

b) Punem problema: ce condiție trebuie să îndeplinească coeficienții unui polinom ca polinomul să fie identic nul?

Este evident că polinomul nul, adică

$$P^* = 0z^n + 0z^{n-1} + \ldots + 0z + 0,$$

ai cărui coeficienți sînt toți nuli, ia valoarea zero pentru orice valoare a lui z:

$$[a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0] \Rightarrow [\forall z,\ z \in C \quad P(z) = 0]. \tag{1}$$

Vom demonstra implicația inversă: dacă polinomul $P(z)$ este identic nul, toți coeficienții săi sînt nuli. Pentru a fixa ideile, vom lua cazul unui polinom de gradul III,

$$P(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3.$$

Presupunem că polinomul se anulează pentru mai multe valori diferite ale lui z, $z = z_1$, $z = z_2$ ș.a.m.d. (prin ipoteză, astfel de valori există cîte vrem) și căutăm să aflăm coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3. Fiindcă avem patru necunoscute, luăm patru valori diferite ale lui z și formăm patru ecuații:

$$\begin{aligned}
P(z_1) &= a_0z_1^3 + a_1z_1^2 + a_2z_1 + a_3 = 0,\\
P(z_2) &= a_0z_2^3 + a_1z_2^2 + a_2z_2 + a_3 = 0,\\
P(z_3) &= a_0z_3^3 + a_1z_3^2 + a_2z_3 + a_3 = 0,\\
P(z_4) &= a_0z_4^3 + a_1z_4^2 + a_2z_4 + a_3 = 0.
\end{aligned}$$

* În acest enunț, simbolul $P(z)$ apare cu două semnificații diferite. Prima oară $P(z)$ reprezintă polinomul, iar a doua oară, valoarea polinomului (v. 1.1.9). Această ambiguitate va apărea deseori.

Am format astfel un sistem de patru ecuații liniare și omogene cu cele patru necunoscute a_0, a_1, a_2, a_3. Determinantul acestui sistem este

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1^3 & z_1^2 & z_1 & 1\\ z_2^3 & z_2^2 & z_2 & 1\\ z_3^3 & z_3^2 & z_3 & 1\\ z_4^3 & z_4^2 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Este determinantul lui Vandermonde (au apărut liniile în locul coloanelor și invers cu unele intervertiri). Se știe că

$$\Delta = (z_1 - z_2)\,(z_1 - z_3)\,(z_1 - z_4)\,(z_2 - z_3)\,(z_2 - z_4)\,(z_3 - z_4).$$

Deoarece $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq z_3$, ..., $z_3 \neq z_4$, acest produs este diferit de zero, deci $\Delta \neq 0$. Rezultă că sistemul nostru admite o singură soluție, și anume soluția banală

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,$$

ceea ce înseamnă că, dacă polinomul $P(z)$ este identic nul, toți coeficienții săi sînt nuli.

Aceeași demonstrație se poate face pentru un polinom de orice grad. Deci, în general, în cazul polinomului $P(z)$, de gradul n,

$$[\forall z,\ z \in C\ \ P(z) = 0] \Rightarrow [a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0]. \tag{2}$$

Pe baza implicațiilor (1) și (2) putem enunța:

Un polinom $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ este identic nul dacă și numai dacă toți coeficienții săi sînt nuli (adică $P(z) = P^*$).

$$[\forall z,\ z \in C,\quad P(z) = 0] \Leftrightarrow [a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0\ (P(z) = P^*)].$$

1.2.3. **Observări.** 1) În demonstrația teoremei de mai sus nu am folosit toată ipoteza. Se presupune că polinomul se anulează pentru orice valoare a lui z, iar noi am folosit, în cazul polinomului de gradul III, numai patru valori (căci avem patru coeficienți, deci ne-au trebuit patru ecuații). Putem enunța teorema mai tare:

> Dacă un polinom $P(z)$ de gradul n se anulează pentru $n + 1$ valori ale lui z, polinomul este identic nul.

Cu alte cuvinte: o ecuație algebrică de gradul n are cel mult n rădăcini.

2) În cursul demonstrației s-a folosit și faptul următor: dacă un polinom de gradul n se anulează pentru *orice* valoare a lui z putem găsi $n + 1$ valori ale lui z care-l anulează. Acest lucru se poate face cîtă vreme mulțimea de definiție a funcției corespunzătoare este infinită, cum este mulțimea C. Demonstrația nu mai este

valabilă, și teorema nu mai este adevărată, dacă acea mulțime este finită. Dacă, însă, mulțimea de definiție este finită, formată din n elemente și operațiile au aceleași proprietăți ca în cazul numerelor, teorema rămîne adevărată pentru polinoame de grad $\leqslant n-1$.

De asemenea, s-a folosit faptul că dacă toți factorii unui produs sînt diferiți de zero, produsul este diferit de zero. Dacă variabila z ia valori într-o mulțime în care această propoziție nu este adevărată, demonstrația nu mai este valabilă și teorema nu mai este adevărată.

3) Noțiunile de polinom nul, P^*, și polinom identic nul nu trebuie confundate, dar ultima teoremă arată că *singurul polinom identic nul este polinomul nul*, adică singurul polinom care ia valoarea zero pentru orice valoare a variabilei este polinomul în care toți coeficienții sînt nuli.

1.2.4. **Condiția ca două polinoame să fie identice.** Acum putem rezolva problema pusă la începutul acestui paragraf (1.2.1): cînd sînt două polinoame identice?

Considerăm polinoamele

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n \text{ și}$$
$$Q(z) = b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Este evident că dacă coeficienții acelorași puteri ale lui z (pe scurt: coeficienții corespunzători) sînt aceiași în ambele polinoame, cele două polinoame sînt identice, căci sînt unul și același polinom

$$[a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n] \Leftrightarrow [\forall z,\ z \in C\ \ P(z) = Q(z)]. \qquad (3)$$

Pentru a demonstra implicația inversă, considerăm polinoamele de mai sus și judecăm astfel:

Dacă cele două polinoame iau aceeași valoare pentru orice valoare complexă a lui z, diferența lor este egală cu zero pentru orice valoare complexă a lui z, adică polinomul

$$P(z) - Q(z) = (a_0 - b_0)z^n + (a_1 - b_1)z^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})z + a_n - b_n$$

este identic nul. Aplicînd teorema precedentă, rezultă că

$$a_0 - b_0 = 0,\ a_1 - b_1 = 0,\ \ldots,\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0,\ a_n - b_n = 0$$

sau

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ a_n = b_n,$$

ceea ce înseamnă că coeficienții corespunzători sînt egali. Deci

$$[\forall z,\ z \in C\ P(z) = Q(z)] \Rightarrow [a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n]. \qquad (4)$$

Pe baza implicațiilor (3) și (4) putem enunța:

Două polinoame

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n,$$
$$Q(z) = b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_{n-1}z + b_n$$

sînt identice dacă și numai dacă coeficienții lor corespunzători sînt egali

$$[\forall z,\ z \in C\ \ P(z) = Q(z)] \Leftrightarrow [a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n].$$

1.2.5. **Observări.** 1) Faptul că în cele două polinoame primul termen conține z la aceeași putere ar putea da impresia că trebuie pusă condiția ca cele două polinoame să fie de același grad. Dar acest lucru nu este necesar, căci în demonstrație nu intervine nicăieri faptul că $a_0 \neq 0$ sau $b_0 \neq 0$. Totul este ca în ambele polinoame să figureze aceleași puteri ale lui z, ca fiecărui coeficient dintr-un polinom să-i corespundă un coeficient al celuilalt polinom. Dacă polinoamele nu sînt de același grad, se adaugă la polinomul de grad mai mic unul sau mai mulți termeni cu coeficientul zero. De exemplu, în cazul cînd polinoamele sînt

$$P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e, \qquad Q(z) = mz^2 + nz + p,$$

polinomul al doilea se scrie:

$$Q(z) = 0z^4 + 0z^3 + mz^2 + nz + p$$

și condiția ca $P(z)$ să fie identic cu $Q(z)$ este:

$$a = 0,\ \ b = 0,\ \ c = m,\ \ d = n,\ \ e = p.$$

2) Din cele arătate la 1.2.3., obs. 2 rezultă că pentru ca două polinoame de gradul n să fie identice este suficient ca ele să ia valori egale pentru $n+1$ valori ale variabilei (nu pentru toate). Acest lucru se întîmplă numai la funcții-polinom. O funcție oarecare este definită cînd se dau valorile ei pentru toate valorile variabilei din mulțimea ei de definiție, nu numai pentru unele din ele.

3) În algebra elementară, regulile de calcul cu polinoame se justifică prin faptul că ele duc la funcții egale, adică la identități (v. 1.1.8). De exemplu, suma polinoamelor

$$P(z) = 2z^2 - 7z + 3 \text{ și } Q(z) = z^2 + 5z - 8$$

este polinomul

$$S(z) = 3z^2 - 2z - 5$$

pentru că, oricare ar fi z ($z \in C$, $z \in R$ etc.), numărul $S(z)$ este suma numerelor $P(z)$ și $Q(z)$.

Algebra elementară ne învață cum se află un polinom care să îndeplinească această condiție, dar ea nu ne garantează că $S(z)$ este singurul polinom care să aibă această însușire. Numai ultima teoremă ne dă această garanție.

1.2.6. **Metoda coeficienților nedeterminați.** Teorema de la 1.2.4. stă la baza metodei coeficienților nedeterminați, pe care o vom pune în evidență prin exemplele următoare:

1) *Să se pună polinomul*

$$P(z) = 2z^3 - 5z^2 - 8z + 7$$

sub forma

$$E(z) = a(z-2)^3 + b(z-2)^2 + c(z-2) + d.$$

Efectuînd calculele, se obține

$$Q(z) = az^3 + (-6a + b)z^2 + (12a - 4b + c)z + (-8a + 4b - 2c + d).$$

Acum judecăm astfel:

Polinomul $Q(z)$ s-a obținut efectuînd operațiile indicate în $E(z)$, deci expresiile $E(z)$ și $Q(z)$ definesc aceeași funcție (1.1.5.). Atunci $E(z)$ va fi identic cu $P(z)$ dacă și numai dacă $Q(z)$ va fi identic cu $P(z)$. Aplicăm teorema de la 1.2.4.

Egalînd coeficienții corespunzători ai polinoamelor $P(z)$ și $Q(z)$, se obține

$$a = 2, \quad -6a + b = -5, \quad 12a - 4b + c = -8, \quad -8a + 4b - 2c + d = 7.$$

Acest sistem de ecuații dă: $a = 2$, $b = 7$, $c = -4$, $d = -13$. Deci,

$$2z^3 - 5z^2 - 8z + 7 = 2(z-2)^3 + 7(z-2)^2 - 4(z-2) - 13.$$

Se spune că am dezvoltat polinomul $P(z)$ după puterile descrescătoare ale lui $(z-2)$.

2) *Să se determine constantele reale A, B, C astfel încît să aibă loc identitatea*

$$\forall x,\ x \in R \setminus \{-1, 1, 2\} \quad \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Scăpăm de numitori:

$$2x + 1 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1).$$

Efectuăm înmulțirile și ordonăm după puterile descrescătoare ale lui x. Obținem

$$2x + 1 = (A + B + C)x^2 + (-3A - B)x + 2A - 2B - C.$$

Egalăm coeficienții corespunzători:

$$A + B + C = 0, \quad -3A - B = 2, \quad 2A - 2B - C = 1,$$

de unde

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = \frac{5}{3}.$$

Deci,

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{5}{3}}{x-2}.$$

Se spune că fracția $\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ a fost *descompusă în fracții simple*. Asemenea descompuneri sînt necesare în calculul integral.

1.3. Împărțirea polinoamelor

1.3.1. **Recapitulare.** Fiind date două polinoame, $D(z)$ și $I(z)$ cu coeficienți din Q, R sau C, $I(z)$ fiind diferit de polinomul nul, a împărți primul dintre aceste polinoame prin cel de-al doilea înseamnă a găsi două polinoame $C(z)$ și $R(z)$, astfel încît să aibă loc identitatea:

$$\forall z,\ z \in C \quad D(z) = I(z) \cdot C(z) + R(z)$$

și gradul lui $R(z)$ să fie mai mic decît gradul lui $I(z)$ sau $R(z)$ să fie polinomul nul.

Polinoamele $D(z)$, $I(z)$, $C(z)$ și $R(z)$ se numesc, respectiv, *deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul.*

În clasele anterioare s-a învățat un algoritm (procedeu) prin care se pot afla cîtul și restul. De exemplu, pentru

$$D(z) = 3z^4 - 7z^3 + 12z^2 + 3z - 6, \quad I(z) = z^2 - 2z + 4,$$

se obțin cîtul și restul

$$C(z) = 3z^2 - z - 2, \quad R(z) = 3z + 2.$$

Are loc identitatea

$$(*)\ 3z^4 - 7z^3 + 12z^2 + 3z - 6 = (z^2 - 2z + 4)(3z^2 - z - 2) + 3z + 2.$$

Algoritmul se poate aplica și în cazul polinoamelor cu coeficienți complecși.

De vreme ce cunoaștem un procedeu după care putem afla cîtul și restul, problema existenței nu se mai pune; ele există totdeauna (oricare ar fi polinoamele $D(z)$ și $I(z)$). Mai mult, cîtul și restul sînt *unice* (v. 1.3.3.).

Menționăm că, dacă dăm lui z o valoare $z = a$, relația dintre deîmpărțit, împărțitor, cît și rest devine relația numerică $D(a) = I(a)C(a) + R(a)$, dar aceasta nu înseamnă că $C(a)$ și $R(a)$ sînt, respectiv, cîtul și restul împărțirii numărului $D(a)$ prin numărul $I(a)$. Astfel, în exemplul polinoamelor cu coeficienți numerici de mai sus, $D(3) = 165$, $I(3) = 7$, $C(3) = 22$, $R(3) = 11$. Relația (*) devine $165 = 7 \cdot 22 + 11$; ea este adevărată, dar 22 și 11 nu sînt cîtul și restul împărțirii lui 165 prin 7.

1.3.2. **Folosirea metodei coeficienților nedeterminați.** Împărțirea se poate face și prin această metodă. Reluăm exemplul precedent.

Deoarece gr. $D(z) = 4$ și gr. $I(z) = 2$, cîtul va fi de gradul $4 - 2 = 2$ iar gradul restului va fi cel mult 1. Trebuie deci să aflăm un polinom de gradul II, $C(z) = az^2 + bz + c$, și un polinom de gradul I, $R(z) = dz + e$, astfel încît să aibă loc identitatea

$$3z^4 - 7z^3 + 12z^2 + 3z - 6 = (z^2 - 2z + 4)(az^2 + bz + c) + d$$

Efectuăm operațiile din partea dreaptă și obținem:

$$az^4 + (-2a + b)z^3 + (4a - 2b + c)z^2 + (4b - 2c + d)z + 4c + e.$$

Egalăm coeficienții corespunzători:

$$a = 3,\ -2a + b = -7,\ 4a - 2b + c = 12,\ 4b - 2c + d = 3,$$
$$4c + e = -6.$$

Acest sistem de 5 ecuații cu 5 necunoscute dă:

$$a = 3,\ b = -1,\ c = -2,\ d = 3,\ e = 2.$$

Deci cîtul și restul sînt

$$az^2 + bz + c = 3z^2 - z - 2,\quad dz + e = 3z + 2.$$

1.3.3. **Unicitatea cîtului și a restului.** Fiind date două polinoame $D(z)$ și $I(z)$, procedeul uzual de împărțire ne dă un polinom $C(z)$ și un polinom $R(z)$, astfel încît să aibă loc identitatea:

$$D = IC + R, \qquad \text{gr.}R < \text{gr. } I \tag{1}$$

(pentru a simplifica scrisul, n-am mai scris litera z). Aceasta nu înseamnă că polinoamele $C(z)$ și $R(z)$ găsite astfel sînt singurele care satisfac această condiție. S-ar putea ca printr-un alt procedeu să se obțină un alt cît și un alt rest? Vom demonstra că acest lucru nu este posibil.

Demonstrația se face prin reducere la absurd.

Presupunem că ar exista alte două polinoame, C' și R', care satisfac de asemenea condiția

$$D = IC' + R' \qquad \text{gr. } R' < \text{gr. } I. \tag{2}$$

Scăzînd (2) din (1), se obține identitatea

$$I(C - C') = R' - R. \tag{3}$$

Comparăm gradele celor două polinoame scrise de o parte și de alta a semnului „=". Dacă $C \neq C'$, diferența $C - C'$ nu este polinomul nul, deci ea este un polinom constant sau un polinom de grad > 0. Înmulțind I cu un polinom de grad $\geqslant 0$, se obține un produs de grad cel puțin egal cu gradul lui I, deci

$$\text{gr. } I(C - C') \geqslant \text{gr. } I. \tag{4}$$

Cît despre polinomul din partea dreaptă, avem (1.1.6)

$$\text{gr. } (R' - R) \leqslant \max.\ (\text{gr. } R',\ \text{gr. } R).$$

Dar R și R' sînt de grad mai mic decît I, deci max. (gr. R', gr. R) $<$ gr. I. Rezultă că

$$\text{gr. } (R' - R) < \text{gr. } I. \tag{5}$$

Rezultatele (4) și (5) sînt contradictorii, căci ar însemna că în identitatea (3) mul din stînga să fie de grad mai mare decît cel din dreapta. Rezultă că Se nerea $C \neq C'$ este falsă, deci $C = C'$. Atunci $C - C'$ este polinomul nul, nomul din dreapta este polinomul nul, deci $R = R'$.

simple.

Așadar, $C' = C$ și $R' = R$, ceea ce a fost de demonstrat.

Fiind date polinoamele $D(z)$ și $I(z)$, există un singur polinom $C(z)$ și un singur polinom $R(z)$ astfel încît să aibă loc identitatea

$$D(z) = I(z)C(z) + R(z) \text{ și gr. } R(z) < \text{gr. } I(z).$$

1.3.4. **Schema lui Horner.** În cazul cînd împărțitorul este un binom de forma $z - p$, împărțirea se poate face printr-un procedeu rapid.

Fie de făcut împărțirea

$$(a_0z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + a_3z^2 + a_4z + a_5) : (z - p).$$

Cîtul va fi un polinom de gradul IV de forma $c_0z^4 + c_1z^3 + c_2z^2 + c_3z + c_4$, iar restul va fi un polinom constant R. Trebuie să aflăm coeficienții c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 și R. Lucrarea începe astfel:

$$\begin{array}{l|l} a_0z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + \ldots + a_5 & z - p \\ \underline{-a_0z^5 + a_0pz^4} & \hline \\ \diagup\quad \underbrace{(a_0p + a_1)}_{c_1}z^4 + a_2z^3 + \ldots + a_5 & a_0z^4 + \underbrace{(a_0p + a_1)}_{c_1}z^3 + \ldots \end{array}$$

. . . . . .

Se constată că primul coeficient al cîtului este egal cu primul coeficient al deîmpărțitului, $c_0 = a_0$, iar coeficientul următor al cîtului este

$$c_1 = a_0p + a_1 = c_0p + a_1;$$

el se obține înmulțind primul coeficient al cîtului cu p și adăugînd la produs pe a_1.

Acum primul rest parțial se scrie $c_1z^4 + a_2z^3 + \ldots + a_5$ și lucrarea continuă ca și cum am avea de împărțit acest rest parțial prin $(z - p)$.

$$\begin{array}{l|l} c_1z^4 + a_2z^3 + \ldots + a_5 & z - p \\ \underline{-c_1z^4 + c_1pz^3} & \hline \\ \diagup\quad \underbrace{(c_1p + a_2)}_{c_2}z^3 + \ldots + a_5 & c_1z^3 + \underbrace{(c_1p + a_2)}_{c_2}z^2 + \ldots \end{array}$$

. . . . . .

Se constată că coeficientul următor al cîtului este

$$c_2 = c_1p + a_2;$$

c_2 se obține din c_1 la fel cum s-a obținut c_1 din c_0, și anume: coeficientul precedent al cîtului se înmulțește cu p, și produsul se adună cu coeficientul următor al deîmpărțitului. În același fel se obține c_3 din c_2 ș.a.m.d. În general,

$$c_i = c_{i-1}p + a_i.$$

Ultimul coeficient al cîtului este $c_4 = c_3p + a_4$, și ultimul pas al împărțirii se prezintă astfel:

$$\begin{array}{r|l} c_4z + a_5 & z - p \\ \hline -c_4z + c_4p & \\ \hline \diagup \quad c_4p + a_5 & c_4 \end{array}$$

Restul este $R(z) = c_4p + a_5$. El se obține prin același procedeu ca și coeficienții cîtului.

În practică se procedează precum urmează. Fie de efectuat împărțirea $(2z^4 - 7z^3 + 8z - 5) : (z - 3)$.

Coeficienții deîmpărțitului se scriu în rîndul întîi (avînd grijă să se scrie și coeficientul lui z^2, care este 0), în rîndul al doilea, la dreapta, se scrie numărul 3 (din $z - 3$), apoi se procedează astfel:

2	−7	0	8	−5	|
2	−1	−3	−1	−8	|3

Sub coeficientul 2, se scrie același număr 2; $2 \cdot 3 + (-7) = -1$, sub (-7) se scrie (-1); $(-1) \cdot 3 + 0 = -3$, sub 0 se scrie -3; $-3 \cdot 3 + 8 = -1$, sub 8 se scrie (-1); în sfîrșit, $(-1) \cdot 3 - 5 = -8$, sub -5 se scrie -8. Cîtul și restul acestei împărțiri sînt:

$$C(z) = 2z^3 - z^2 - 3z - 1, \qquad R(z) = -8.$$

1.3.5. **Exemple.** 1. Dacă împărțitorul este de forma $z + p$, el se pune sub forma $z + p = z - (-p)$. În schema de mai jos s-a făcut împărțirea $(z^3 - 3iz^2 + 4z + 1 - 2i) : (z + 2)$.

1	− 3i	4	1 − 2i	|
1	− 2 − 3i	8 + 6i	− 15 − 14i	| − 2

Cîtul și restul sînt: $C(z) = z^2 - (2 + 3i)z + 8 + 6i$, $R(z) = -15 - 14i$.

2) Numărul p poate fi imaginar, adică un număr complex $a + bi$ în care $b = 0$, ca în cazul

$$[iz^3 - (2 + i)z^2 + 4z - 3 - i] : (z - 1 + i).$$

Împărțitorul este $z - (1 - i)$.

i	− 2 − i	4	− 3 − i	|
i	− 1	3 + i	1 − 3i	| 1 − i

(În acest caz, înmulțirile nu se mai fac în gînd.) Cîtul și restul sînt:

$$C(z) = iz^2 - z + 3 + i, \qquad R(z) = 1 - 3i.$$

Exerciții

Operații cu polinoame

1. Să se calculeze:

a) $[(1 + i)z^2 - 3z + (2 - \sqrt{3})\,i] + [(1 - i)z^2 - iz + i\sqrt{3}]$;

b) $[z^3 - (2 + i)z^2 - iz + 1 - i] - [(3 - i)z^2 + (1 - 2i)z - 2 + 3i]$.

2. Se dă polinomul

$$2z^3 + \sqrt{3}\,z^2 - 5z + 1$$

și se cere să se găsească un polinom care, adunat cu el, să dea polinomul nul.

3. Să se efectueze înmulțirile:

a) $(z + 1 - i)(z - 3 + 2i)$;

b) $[z^2 + (1 - i\sqrt{3})\,z - 3\,(2 + i\sqrt{3})]\,(z - 2 + i\sqrt{3})$;

c) $[z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i]\,[z^2 - (4 + i)\,z + 4 + 2i]$;

d) $[z^2 - (4 - i)\,z + 3 - i]\,[z^2 - (7 + i)\,z + 4(3 + i)]$.

4. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(1 + i)\,z + 1 - 2i = 0$; b) $z^2 - (2 + 3i)\,z - i + 3i = 0$;

c) $z^2 - 5x + 7 + i = 0$; d) $\dfrac{z}{z + i} + \dfrac{z + i}{z - i} = \dfrac{11}{3}$.

5. Să se dea un exemplu de două polinoame $P(z)$ și $Q(z)$ de același grad, astfel ca gradul sumei lor să fie: a) cu 1 mai mic decît gradul lor; b) cu 2 mai mic decît gradul lor.

6. Să se demonstreze că dacă produsul a două polinoame este de gradul zero (un polinom constant), fiecare dintre ele este de gradul zero.

7. Se dau: polinomul $P(z)$ de gradul m și polinomul nul P^*. Care este: a) gradul sumei lor ?; b) gradul produsului lor ?

8. Presupunem că propoziția $[ab = 0] \Rightarrow [a = 0$ sau $b = 0]$ n-ar fi adevărată. Atunci propoziția cu privire la gradul produsului a două polinoame (1.1.6) mai rămîne adevărată ?

9. Se consideră numerele complexe $u = a + bi$, $v = c + di$. Să se găsească condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o îndeplinească numerele reale a, b, c, d, ca produsul $(z + u)(z + v)$ să fie un polinom cu coeficienți reali.

Polinoame identice

10. Să se demonstreze că $[\forall z,\ z \in C\ \ az^2 + bz + c = 0] \Rightarrow [a = b = c = 0]$ dînd lui z valorile $z = 0$, $z = 1$ și $z = -1$.

Să se găsească pe o cale asemănătoare condiția ca polinomul $az^3 + bz^2 + cz + d$ să fie identic nul.

11. Se consideră un polinom de gradul n. Examinînd îndeaproape în ce măsură s-a folosit ipoteza teoremei de la 1.2.2. să se spună pentru cîte valori ale variabilei trebuie să se anuleze un polinom ca să putem conchide că el este polinomul nul?

12. Să se aplice procedeul de la 1.2.2. pentru a determina un polinom de gradul II, $P(z)$, care să se anuleze pentru $z = 1$, $z = 2$ și $z = 3$. Ce teoremă cu privire la sistemele de ecuații liniare se aplică aici?

13. Să se refacă demonstrația teoremei de la 1.2.4. pentru cazul a două polinoame de gradul IV.

14. Considerăm polinoamele $A(z) = z^2 + 2z - 5$, $B(z) = 3z^2 + 5z - 11$. Produsul lor este $P(z) = 3z^4 + 11z^3 - 16z^2 - 47z + 55$.

Să se găsească toate polinoamele care iau pentru orice valoare a lui $z (z \in C$ sau $z \in R)$ aceeași valoare ca produsul $A(z)\,B(z)$. Ce teoremă se aplică aici?

15. Să se determine un polinom de gradul II, $P(z)$, care să îndeplinească condițiile: $P(1) = 9$, $P(2) = 17$, $P(-1) = 11$. Cîte soluții există?

16. Să se demonstreze că: a) dacă un polinom de gradul n ia valori reale pentru $n + 1$ valori reale ale lui x, toți coeficienții polinomului sînt reali; b) dacă un polinom de gradul n ia valori raționale pentru $n + 1$ valori raționale ale lui x, toți coeficienții polinomului sînt raționali.

17. a) Să se determine un polinom $P(z)$ de grad $\leqslant 2$ care să satisfacă identitatea:

$$\forall z,\ z \in C\ \ P(z) = P(1 - z).$$

Să se demonstreze că, dacă $P(z)$ și $Q(z)$ sînt două polinoame care îndeplinesc această condiție, suma lor îndeplinește de asemenea condiția.

b) Aceeași problemă în cazul unui polinom $P(z)$ de grad $\leqslant 3$. c) Generalizare.

18. În vorbirea obișnuită cuvîntul *identic* are sensul următor: două lucruri sînt identice dacă sînt unul și același lucru. De exemplu, autorul poeziei Luceafărul este identic cu poetul Mihai Eminescu. Acest cuvînt are același sens și în expresia *polinoame identice*? (Să se revadă și definiția egalității a două polinoame — 1.2.1.) În cazul cînd răspunsul este afirmativ, de ce mai este necesară teorema de la 1.2.4?

19. Fie $\mathcal{S}$ mulțimea expresiilor algebrice întregi care conțin o singură variabilă z, și $\mathcal{Z}$ mulțimea funcțiilor polinomiale. Fie $f : \mathcal{S} \to \mathcal{Z}$ funcția care asociază fiecărei expresii $E \in \mathcal{S}$ funcția $P \in \mathcal{Z}$ dată de polinomul care se obține efectuînd toate operațiile din E. a) Este funcția f surjectivă? injectivă?; b) Aceeași întrebare dacă $\mathcal{S}$ este mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali.

Metoda coeficienților nedeterminați

20. Să se determine a, b, c, astfel ca să aibă loc identitatea:

$$x^2 + 2x - 7 = a(x - 1)\,(x - 2) + b(x - 2)\,(x - 3) + c(x - 1)\,(x - 3).$$

21. Presupunem că nu cunoaștem formula de rezolvare a ecuației de gradul II. Pentru a rezolva ecuația $x^2 - 5x + 4 = 0$, de exemplu, judecăm astfel: Ecuația va fi rezolvată dacă vom reuși să o punem sub forma $(x - p)\,(x - q) = 0$, căci

atunci rădăcinile ei vor fi p și q. Să se folosească metoda coeficienților nedeterminați pentru a determina p și q. De ce este această metodă ineficientă?

22. Pentru a dezvolta $(a + x)^n$ după puterile crescătoare ale lui x, se poate proceda astfel:

Se scrie $(a + x)^n = c_0a^n + c_1a^{n-1}x + c_2a^{n-2}x^2 + \ldots + c_{n-1}ax^{n-1} + c_nx^n$ coeficienții c_0, c_1,... fiind necunoscuți. Apoi se pune în ambii membri $x = 0$ și se află c_0; se derivează ambii membri ai identității, se pune $x = 0$ și se obține c_1; ș.a.m.d. Să se demonstreze în acest fel formula binomului.

Împărțirea polinoamelor

23. Să se efectueze:

a) $[2z^3 + (7 - \mathrm{i})z^2 + 7z + 3 + \mathrm{i}] : (z + 2 - \mathrm{i})$;

b) $[4z^3 + 12z^2 + (3 - \mathrm{i})z - 9 + 6\mathrm{i})] : (4z^2 - 8\mathrm{i}z - 15 + 22\mathrm{i})$;

c) $[2z^4 + (1 - 2\mathrm{i})z^3 + (4 - 2\mathrm{i})z^2 + (1 + \mathrm{i})\,z - 2\mathrm{i}] : (z^2 - \mathrm{i}z + 2)$.

24. Există un polinom $Q(z)$ astfel ca să aibă loc identitatea

$$\forall z,\ z \in C\ \ z^3 - 2z^2 + 6z + 3 = (z^2 + z + 1)Q(z)?$$

Se poate răspunde la această întrebare fără teorema de la 1.3.3?

25. Să se efectueze împărțirea $(2x^4 - 5x^3 + 3x - 8) : (2x^2 - 3x + 5)$
a) direct; b) prin metoda coeficienților nedeterminați.

26. Să se determine a și b, astfel ca polinomul $2z^4 - 2z^3 + az + b$ să fie divizibil prin polinomul $z^2 - 2z + 3$.

27. Să se determine restul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $(x - a)\,(x - b)$. Aplicație numerică: $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 2$, $a = 2$, $b = 3$.

28. a) Polinoamele $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ satisfac identitatea

$$A(z) = B(z)C(z) + D(z).$$

Avem dreptul să deducem de aici că $D(z)$ este restul împărțirii lui $A(z)$ prin $B(z)$?; b) Întrebare analoagă în cazul unor numere naturale A, B, C, D.

29. a) Se poate împărți polinomul $A(z)$ prin polinomul $B(z)$ dacă gr. $A(z) <$ $<$ gr. $B(z)$?; b) Dar dacă $B(z)$ este polinomul nul, P^*?; c) Este situația analoagă la împărțirea numerelor naturale?

30. a) Să se compare definiția împărțirii polinoamelor cu definiția împărțirii numerelor naturale. În ce constă deosebirea:

b) Fie $C(z)$ și $R(z)$ cîtul și restul împărțirii polinomului $D(z)$ prin polinomul $I(z)$, amîndouă cu coeficienți reali. Dacă în identitatea prin care se definește împărțirea dăm lui z o valoare oarecare $z = a$, obținem relația numerică $D(a) =$ $= I(a)C(a) + R(a)$. Se poate spune că $R(a)$ este restul împărțirii lui $D(a)$ prin $I(a)$?

c) Se consideră polinoamele

$$A(x) = x^2 - 5x + 10,\ \ B(x) = x - 2.$$

Fie $C(x)$ și $R(x)$ cîtul și restul împărțirii lui $A(x)$ prin $B(x)$. Între ce limite poate varia x pentru ca numărul $R(x)$ să fie restul împărțirii numărului $A(x)$ prin numărul $B(x)$?

31. a) $P(x)$ și $Q(x)$ fiind polinoame cu coeficienți întregi, care dintre afirmațiile următoare este adevărată?

1) Suma lor, 2) diferența lor, 3) produsul lor, este un polinom cu coeficienți întregi, 4) cîtul și restul împărțirii lui $P(x)$ prin $Q(x)$ sînt polinoame cu coeficienți întregi.

b) Aceeași întrebare cînd $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame cu coeficienți raționali, iar în afirmațiile (1 — 4) cuvintele *coeficienți întregi* se înlocuiesc prin cuvintele *coeficienți raționali.*

c) Aceeași întrebare cînd $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame cu coeficienți complecși, iar în afirmațiile 1(— 4) cuvintele *coeficienți întregi* se înlocuiesc prin cuvintele *coeficienți complecși.*

În cazurile în care afirmația este falsă, se va da cîte un exemplu.

32. Să se demonstreze că, la împărțirea polinoamelor, cîtul și restul sînt unice, făcînd împărțirea prin metoda coeficienților nedeterminați. (Se poate lua cazul $(a_0z^5 + a_1z^4 + \ldots + a_5) : (b_0z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3)$.

33. Să se efectueze prin schema lui Horner împărțirile:

a) $(2z^5 - 7z^4 + 6z^3 - 8z^2 + 9z + 10) : (z - 2)$;

b) $(4z^4 + 5z^3 - 12z - 40) : \left(z + \frac{1}{2}\right)$;

c) $(z^5 + \sqrt{3}\,z^4 - 5z^3 + 2\sqrt{3}\,z^2 - 6z - 4\sqrt{3}) : (z - \sqrt{3})$;

d) $(4z^5 - 3z^4 + 5z^3 + z^2 + 3z - 2) : (z - \mathrm{i})$;

e) $[z^4 + (1 + \mathrm{i})z^3 + \mathrm{i}z^2 + (-9 + 7\mathrm{i})z - 1 + 3\mathrm{i}] : (z - 2 + \mathrm{i})$.

Polinoame cu coeficienți din Z_n*

34. Să se efectueze calculele următoare în clasele de resturi indicate.

Prin $a : b$, unde $a, b \in Z_n$, se înțelege aici mulțimea elementelor din Z_n care, înmulțite cu b, dau a, adică mulțimea soluțiilor ecuației $ax = b$. Exemple: În Z_7, $\hat{3} : \hat{4} = \hat{6}$; în Z_{20}, $\hat{2} : \hat{7} = \hat{6}$, $\hat{8} : \hat{4} = \{\hat{2}, \hat{7}, \hat{12}, \hat{17}\}$, $\hat{3} : \hat{5} = \emptyset$.

a) în Z_7, $\hat{3} + \hat{5}$; $\hat{5} - \hat{2}$; $\hat{3} - \hat{6}$; $\hat{2} - \hat{3}$; $\hat{4} \cdot \hat{6}$; $\hat{5} : \hat{3}$; $\hat{3} : \hat{5}$; $\hat{1} : \hat{2}$;

b) în Z_6, $\hat{3} + \hat{5}$; $\hat{1} - \hat{2}$; $\hat{2} - \hat{3}$; $\hat{2} - \hat{4}$; $\hat{3} \cdot \hat{5}$; $\hat{3} : \hat{5}$; $\hat{5} : \hat{3}$; $\hat{4} : \hat{2}$;

c) în Z_{10}, $\hat{5} : \hat{3}$; $\hat{8} : \hat{3}$; $\hat{2} : \hat{4}$; $\hat{4} : \hat{4}$; $\hat{2} : \hat{8}$; $\hat{8} : \hat{4}$; $\hat{5} : \hat{5}$; $\hat{6} : \hat{8}$.

* Pentru a rezolva aceste probleme, trebuie studiat 5.1.12. care se poate înțelege fără o pregătire prealabilă. Se vor alcătui tabelele de adunare și de înmulțire pentru clasele de resturi modulo 2, 3, 4, 5, 6, 10 și 12. Notăm cu Z_n mulțimea claselor de resturi modulo n.

35. a) Scăderea $x - y$ este posibilă oricare ar fi elementele x și y din Z_4?; b) Din Z_5?; c) Împărțirea $x : y$ este posibilă oricare ar fi x și y din Z_5?; d) Dar dacă x și y aparțin lui Z_6?; e) Lui Z_{12}?

36. Un element $x \neq 0$ se numește divizor al lui zero, dacă există un element $y \neq 0$, astfel încît $xy = 0$.

Exemple: În Z_{15}, $\hat{3}$ și $\hat{5}$ sînt divizori ai lui zero; în Z_{24}, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{6}$ și $\hat{8}$.

a) Să se găsească toți divizorii lui zero din Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_{12}; b) În care dintre aceste mulțimi este adevărată propoziția: un produs de doi factori este egal cu zero numai dacă măcar unul din factori este zero?

37. Să se efectueze înmulțirile:

a) $(\hat{2}x^2 - \hat{3}x + \hat{4})(\hat{3}x + \hat{2})$ ... coeficienții din Z_6; b) $(\hat{5}x^2 + \hat{3}x + \hat{1})(\hat{2}x^2 + \hat{3})$ ... coeficienții din Z_{10}.

De ce nu se adevărește propoziția cu privire la gradul produsului a două polinoame (1.1.6)?

38. a) Se consideră polinomul $P(x) = x^3 + \hat{2}x$ cu coeficienții din Z_3, în care $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$. Să se verifice că $P(x)$ este identic nul. De ce nu se verifică teorema de la 1.2.2?; b) Aceeași chestiune în cazul polinomului $P(x) = \hat{3}x^6 + x^5 + \hat{2}x^2 + \hat{4}x$ cu coeficienți din Z_5, $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$; c) Aceeași chestiune în cazul polinoamelor $P(x) = \hat{4}x^3 + \hat{2}x$ și $Q(x) = \hat{4}x^7 + x^6 + \hat{5}x^2 + \hat{2}x$, cu coeficienți în Z_6, $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

Ecuații algebrice cu coeficienți complecși

2.0. Introducere

O ecuație algebrică cu o singură necunoscută este o ecuație de forma

$$P(z) = 0,$$

unde $P(z)$ este un polinom. Dacă nu se face mențiunea contrară, se înțelege că $P(z) \not\equiv P^*$.

Exemple: $z^3 - 2z^2 - 11z + 12 = 0$, $\sqrt{3}\,z^4 + 5z^3 - \pi z + 2 = 0$,

$$2z^5 + (3 + \mathrm{i})z^4 - (\sqrt{2} - \mathrm{i})\,z^3 + \frac{4}{7}\,z^2 - 2\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i} = 0$$

sînt ecuații algebrice. În schimb,

$$2 = x^2 - 1, \quad \log x = 1 - x, \quad x - 2\sin x = 0$$

nu sînt ecuații algebrice, sînt ecuații *transcendente*.

Gradul polinomului din partea stîngă a unei ecuații algebrice se numește gradul ecuației.

Dacă $P(a) = 0$, numărul a se numește *soluție* sau *rădăcină* a ecuației $P(z) = 0$; se mai spune că este o rădăcină a polinomului $P(z)$.

În acest capitol vom trata ecuații algebrice cu coeficienți complecși, în care necunoscuta ia valori complexe.

În algebra elementară se învață cum se rezolvă ecuațiile algebrice de gradul I și II, de forma $ax + b = 0$, respectiv $ax^2 + bx + c = 0$, și unele ecuații particulare de grad superior (ecuații bipătrate, binome etc.).

Rezolvarea ecuațiilor algebrice de grad superior este una din cele mai importante și mai fecunde probleme ale matematicii și, într-o anumită perioadă, a fost obiectul principal al algebrei.

Încă din antichitate, matematicienii știau să rezolve ecuații de gradul II, printr-o metodă apropiată de cea care se folosește astăzi. În secolul al XVI-lea, matematicienii italieni (Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari) au găsit formule de rezolvare pentru ecuațiile de gradul III și IV. De atunci și pînă la mijlocul secolului al XIX-lea, cei mai de seamă matematicieni ai lumii au făcut eforturi mari să găsească formule de rezolvare pentru ecuații de grad mai mare decît patru, dar aceste eforturi au fost zadarnice. Problema a fost rezolvată, în sens negativ, abia în prima jumătate a secolului al XIX-lea, printr-o lucrare a matematicianului norvegian H. Abel, care a murit la vîrsta de numai 27 de ani. El a demonstrat că, în general, *o ecuație algebrică de grad mai mare decît patru nu poate fi rezolvată prin radicali.* Cu alte cuvinte, nu există nici o expresie cu radicali formată cu coeficienții ecuației — și cu atît mai puțin va exista o expresie rațională — care să fie o rădăcină a ecuației.

Cercetările care s-au făcut în legătură cu teoria ecuațiilor algebrice au impus un studiu adîncit al polinoamelor, care a dus la rezultate importante cu privire la rădăcinile ecuațiilor algebrice de orice grad. Astfel, fără a putea rezolva ecuația $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este un polinom oarecare, s-a putut stabili cîte rădăcini are ecuația, unele relații între coeficienții polinomului $P(x)$ și rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ ș.a.m.d.

În acest capitol se tratează unele dintre aceste proprietăți. În matematica modernă ele se studiază într-un cadru foarte general. Aici vom considera cazul polinoamelor cu coeficienți complecși, în care variabila ia valori complexe.

Un rezultat fundamental care stabilește o legătură între teoria polinoamelor și rădăcinile ecuațiilor algebrice este legat de divizibilitatea polinoamelor și constă în teorema lui Bézout. De aceea începem cu această teoremă.

2.1. Teorema lui Bézout

2.1.1. **Divizibilitatea polinoamelor.** Considerăm, de exemplu, polinoamele

$$A(z) = z^3 - z^2 - z - 2 \text{ și } B(z) = z - 2.$$

Împărțirea $A(z) : B(z)$ dă cîtul $C(z) = z^2 + z + 1$ și ca rest polinomul nul; are loc identitatea

$$A(z) = B(z)\,C(z)$$

care arată că există un polinom, $C(z) = z^2 + z + 1$, care, înmulțit cu $B(z)$, dă $A(z)$. Se spune că polinomul $A(z) = z^3 - z^2 - z - 2$ este *divizibil* prin polinomul $B(z) = z - 2$.

> Se spune că polinomul $A(z)$ este divizibil prin polinomul $B(z)$, dacă există un polinom $C(z)$, astfel încît să aibă loc identitatea
>
> $$\forall z,\ z \in C,\ A(z) = B(z)\,C(z).$$

Pentru a decide dacă un polinom $A(z)$ este divizibil printr-un polinom $B(z)$, se face împărțirea $A(z) : B(z)$. Dacă se obține ca rest polinomul nul, răspunsul este afirmativ; dar dacă se obține un alt rest, de

exemplu $3z + 5$? Atunci răspunsul este negativ, căci, dacă ar exista un polinom $C(z)$ astfel încît să aibă loc identitatea $A(z) = B(z)\,C(z)$, adică $A(z) = B(z)\,C(z) + P^*$, restul împărțirii fiind unic (1.2.3), ar urma că $P^* = 3z + 5$ — ceea ce nu este adevărat. Așadar:

Un polinom $A(z)$ este divizibil printr-un polinom $B(z)$ dacă și numai dacă împărțirea $A(z) : B(z)$ dă ca rest polinomul nul.

2.1.2. **Observare.** Relația de divizibilitate este o relație între polinoame, nu între funcțiile-polinom corespunzătoare. Aici, simbolurile $A(z)$, $B(z)$ etc. reprezintă polinoamele, ca expresii algebrice, nu valorile funcțiilor corespunzătoare (v. 1.1.9). Dacă $A(z)$, $B(z)$ și $C(z)$ ar reprezenta numere, relația

$$A(z) = B(z)\;C(z)$$

care apare în definiția divizibilității polinoamelor n-ar avea de multe ori nici un sens. Astfel, în cazul exemplului de mai sus relația este

$$z^3 - z^2 - z - 2 = (z - 2)\,(z^2 + z + 1).$$

Pentru $z = \frac{1}{2}$, ea devine $\frac{21}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{4}$ și arată că $\frac{21}{8}$ este „divizibil" prin $\frac{3}{2}$.

Aceasta n-are nici un sens, căci orice fracție este divizibilă prin orice fracție (diferită de zero).

2.1.3. **Teorema lui Bézout.** a). Fie $P(z)$ un polinom și R restul împărțirii lui $P(z)$ printr-un polinom de forma $z - a$. Împărțitorul fiind de gradul I, restul R va fi de gradul zero (o constantă, eventual zero).

Valoarea polinomului $P(z)$ pentru $z = a$ este egală cu restul împărțirii polinomului $P(z)$ prin $z - a$.

$$P(a) = R.$$

Pentru a demonstra* această teoremă, pornim de la identitatea

$$\forall z,\ z \in C \qquad P(z) = (z - a)\,C(z) + R.$$

Dacă înlocuim în partea dreaptă a acestei identități z prin a, obținem $(a - a)\,C(a) + R = 0 \cdot C(a) + R = 0 + R = R$. Deci,

$$P(a) = R,$$

ceea ce a fost de demonstrat.

---

* Se recomandă să se facă întîi raționamentul pe un caz particular. De exemplu, împărțirea $(z^3 - 8z^2 + 5z + 19) : (z - 2)$ dă cîtul $z^2 - 6z - 7$ și restul 5. Folosind identitatea

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 5z + 19 = (z - 2)\,(z^2 - 6z - 7) + 5$$

ne propunem să calculăm $P(2)$. Rezultatul se obține imediat dacă înlocuirea se face în partea dreaptă.

b) De aici rezultă imediat că dacă $R = 0$, $P(a) = 0$ și reciproc.

Un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$ dacă și numai dacă numărul a este o rădăcină a ecuației $P(z) = 0$.

$$[P(z) \text{ divizibil prin } (z - a)] \Leftrightarrow [P(a) = 0].$$

Aceste două propoziții, dintre care a doua este o consecință a primei, dar cu mult mai importantă, formează teorema lui Bézout.

● Aplicații

2.1.4. **Legătura dintre divizibilitatea polinoamelor și rădăcinile ecuațiilor algebrice.** Teorema lui Bézout (partea a doua) arată că propozițiile:

Numărul a este o rădăcină a ecuației algebrice $P(z) = 0$.	Polinomul $P(z)$ este divizibil prin $z - a$.

sînt echivalente: dacă una din ele este adevărată, cealaltă este de asemenea adevărată. Datorită acestui fapt, din studiul divizorilor de forma $z - a$ ai polinoamelor se pot trage concluzii cu privire la rădăcinile unei ecuații algebrice (v. 2.2.4.) și, invers, cunoscînd rădăcinile unei ecuații algebrice $P(z) = 0$ se cunosc divizorii de forma $z - a$ ai polinomului $P(z)$. În special dacă se cunoaște o rădăcină a unei ecuații algebrice, se poate coborî gradul ecuației.

Exemplu. *Să se rezolve ecuația*

$$P(z) = 3z^3 - 11z^2 + 8z - 6 = 0$$

știind că admite rădăcina $z = 3$.

Știm că polinomul $P(z)$ este divizibil prin $z - 3$. Împărțirea dă cîtul $3z^2 - 2z + 2$, deci ecuația se poate scrie sub forma

$$(z - 3)\,(3z^2 - 2z + 2) = 0$$

și se descompune în

$$z - 3 = 0 \text{ și } 3z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Prima ecuație dă rădăcina cunoscută $z = 3$; a rămas să rezolvăm ecuația $3z^2 - 2z + 2 = 0$, al cărei grad este cu 1 mai mic decît al ecuației propuse. Rădăcinile ei sînt $\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{3}$. Rădăcinile ecuației propuse sînt: 3 și $\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{3}$.

2.1.5. Dacă a este o rădăcină a ecuației $P(z) = 0$, polinomul $P(z)$ este divizibil prin $z - a$. Fie $C(z)$ cîtul împărțirii lui $P(z)$ prin $z - a$. Atunci

$$\forall z,\ z \in C\ P(z) = (z - a)\ C(z).$$

Fie b o altă rădăcină a aceleiași ecuații. Înlocuind în ultima identitate z prin b obținem

$$P(b) = (b - a)\ C(b).$$

Deoarece $P(b) = 0$, expresia din dreapta este egală cu zero. Dar $b - a \neq 0$, deci $C(b) = 0$, b este o rădăcină a ecuației $C(z) = 0$, deci $C(z)$ este divizibil prin $z - b$.

Dacă a și b sînt două rădăcini ale ecuației algebrice $P(z) = 0$ și $P(z) : (z - a) = C(z)$, atunci $C(z)$ este divizibil prin $z - b$.

Dacă c este o a treia rădăcină a ecuației $P(z) = 0$ și $C(z) : (z - c) = D(z)$, atunci $D(z)$ este divizibil prin $(z - c)$ ș.a.m.d.

Exemplu. *Să se rezolve ecuația*

$$P(z) = 3z^4 + 4z^3 + 3z - 10 = 0$$

știind că admite rădăcinile 1 și -2.

$P(z)$ este divizibil prin $z - 1$, iar cîtul este divizibil $z + 2$. Lucrările se așază astfel:

2	4	0	3	−10	
3	7	7	10	0	1
3	1	5	0		−2

Se împarte polinomul dat prin $z - 1$. În rîndul al doilea apar coeficienții cîtului $P(z) : (z - 1)$. Continuăm lucrarea imediat, folosind rîndul al doilea ca deîmpărțit și împărțind prin $z + 2$. În rîndul al treilea apar coeficienții noului cît $[P(z) : (z - 1)] : (z + 2) = P(z) : [(z - 1)(z + 2)]$. Acest cît este $3z^2 + z + 5$. Acum ecuația se scrie

$$P(z) = (z - 1)(z + 2)(3z^2 + z + 5) = 0$$

și se descompune în

$$z - 1 = 0,\ z + 2 = 0,\ 3z^2 + z + 5 = 0.$$

Primele două ecuații dau rădăcinile 1 și -2, cunoscute dinainte, iar ecuația a treia dă $z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{59}}{6}$.

Rădăcinile ecuației propuse sînt: 1, -2 și $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{59}}{6}$.

Cînd se cunoaște o rădăcină a unei ecuații sau două, sau trei... rezolvarea ei se reduce la rezolvarea unei alte ecuații, al cărei grad este cu 1, 2, 3, ... mai mic decît gradul ecuației inițiale, ceea ce ne permite uneori să rezolvăm ecuația.

2.1.6. **Divizibilitatea prin $(z - a)$ și $(z - b)$.** Fie a și b două rădăcini ale ecuației algebrice $P(z) = 0$. Atunci $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)$

și $(z - b)$. $P(z)$ fiind divizibil prin $z - a$, există un polinom $C(z)$, astfel încît să aibă loc identitatea

$$P(z) = (z - a)\ C(z).$$

Am arătat (2.1.5.) că $C(z)$ este divizibil prin $z - b$, deci există un polinom $D(z)$, astfel încît să aibă loc identitatea

$$C(z) = (z - b)\ D(z).$$

Înlocuind în ultima identitate $C(z)$ prin $(z - b)D(z)$, obținem

$$P(z) = [(z - a)(z - b)]\ D(z),$$

ceea ce înseamnă că $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)(z - b)$.

Dacă un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$ și $z - b$, el este divizibil prin $(z - a)(z - b)$.

Teorema se extinde ușor pentru cazul cînd polinomul este divizibil prin 3, 4, ... factori de această formă.

Exemplu. Ecuația

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 17z - 10 = 0$$

admite ca rădăcini numerele 1 și 2, deci $P(z)$ este divizibil prin $z - 1$ și $z - 2$. Rezultă că $P(z)$ este divizibil prin $(z - 1)(z - 2)$, adică prin $z^2 - 3z + 2$ — ceea ce se poate verifica, făcînd împărțirea.

2.1.7. **Aflarea valorii unui polinom prin schema lui Horner.** Tot teorema lui Bézout (partea întîi) ne arată că, pentru a afla valoarea $P(a)$ a unui polinom $P(z)$ pentru o valoare $z = a$ a variabilei, putem calcula restul R al împărțirii $P(z) : (z - a)$, căci $P(a) = R$. Restul se află foarte ușor dacă se folosește schema lui Horner.

Astfel, în primul exemplu de la 1.3.5. am aflat, printr-o împărțire, valoarea polinomului $P(z) = z^3 - 3iz^2 + 4z + 1 - 2i$ pentru $z = -2$:

$$P(-2) = -15 - 14i.$$

În exemplul al doilea am aflat pe aceeași cale valoarea polinomului $P(z) = iz^3 - (2 + i)z^2 + 4z - 3 - i$ pentru $z = 1 - i$:

$$P(1 - i) = 1 - 3i.$$

2.2. Descompunerea polinoamelor în factori liniari. Numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice

2.2.1. **Soluțiile ecuațiilor algebrice în diferite sisteme numerice.** 1. În mulțimea numerelor naturale, ecuația

$$a + x = b, \qquad a, b \in N \tag{1}$$

admite o soluție numai dacă $a < b$. Exemplu: $x + 3 = 5$, contraexemplu: $x + 3 = 1$. Numai după ce au fost introduse numerele întregi negative și s-au definit operațiile în Z, orice ecuație de forma (1) în care $a, b \in Z$ are o soluție, $x = b - a$.

2. În mulțimea numerelor întregi, ecuația

$$ax = b, \qquad a, b \in Z \tag{2}$$

nu admite totdeauna o soluție. Exemplu: $3x = 12$, contraexemplu: $3x = 11$. Numai după ce s-au introdus numerele raționale și s-au definit operațiile cu aceste numere, orice ecuație de forma (2) în care $a, b \in Q$, $a \neq 0$ admite o soluție, $x = \frac{b}{a}$.

3. Cînd se trece la ecuația de gradul II, apare necesitatea unor noi lărgiri ale noțiunii de număr, căci ecuația

$$x^2 = a, \quad a \in Q \tag{3}$$

nu are totdeauna o soluție în Q. Exemplu: $x^2 = 9$, contraexemplu: $x^2 = 2$, $x^2 = -9$. Numai în urma introducerii numerelor iraționale de forma $\sqrt{a}$, $a \geqslant 0$ și, mai general, după ce s-a construit mulțimea R a numerelor reale, orice ecuație de forma (3) în care $a \geqslant 0$ are o soluție, chiar două: $x = \sqrt{a}$ și $x = -\sqrt{a}$.

Aceasta cîtă vreme $a \geqslant 0$. Cînd $a < 0$ apare o nouă imposibilitate. Această imposibilitate se înlătură prin introducerea numerelor complexe, de forma $a + bi$. În mulțimea C a numerelor complexe, orice ecuație de forma (3) cu $a \in C$ are o soluție. De exemplu, $x^2 = -9$, $x = \pm 3i$. Mai mult, după cum s-a arătat în algebra elementară, în C orice ecuație de gradul II, $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in C$, $a \neq 0$, are două soluții date de formula cunoscută.

4. Cînd se trece la ecuații de grad > 2, cum ar fi:

$$x^3 - 3x + 5 = 0, \quad x^4 - 3x^2 + \sqrt{3}x + i = 0,$$

se pune problema următoare: sîntem siguri că aceste ecuații au măcar cîte o soluție? Trecerea de la ecuația de gradul I la cea de gradul II a impus o lărgire a noțiunii de număr, chiar două: nu cumva trecerea la ecuația de gradul III va impune o altă lărgire a noțiunii de număr, trecerea la ecuația de gradul IV încă una, ș.a.m.d.?

Răspunsul îl dă teorema următoare:

2.2.2. **Teorema fundamentală a algebrei.**

Orice ecuație algebrică

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in C, \quad n > 0$$

are cel puțin o rădăcină în C.

Simbolic,

$$\forall P(z), \ \exists z_1, \ z_1 \in C, \text{ astfel încît } P(z_1) = 0.$$

Această teoremă se numește *teorema fundamentală a algebrei* sau *teorema lui Gauss*, unul dintre cei mai mari matematicieni germani din sec. XIX sau *teorema lui d'Alembert*. Nu vom da demonstrația ei.

Teorema fundamentală a algebrei arată că procesul de lărgire a noțiunii de număr astfel ca diferitele ecuații algebrice să aibă soluții, se termină odată cu introducerea numerelor complexe. Se spune că corpul numerelor complexe este *algebric închis*.

2.2.3. **Observare.** Am presupus că ecuația are coeficienți complecși. Aceasta nu exclude ca coeficienții să fie reali, raționali, întregi sau chiar numere naturale, căci $Z \subset Q \subset R \subset C$. De asemenea, rădăcina poate fi reală, rațională ș.a.m.d., dar existența ei este asigurată numai dacă se admit ca soluții și numere complexe.

2.2.4. **Descompunerea polinoamelor în factori liniari.** Între rădăcinile unei ecuații algebrice $P(z) = 0$ și descompunerea polinomului $P(z)$ există o legătură foarte strînsă, de aceea, pentru a putea continua studiul ecuațiilor algebrice, trebuie să ne ocupăm de descompunerea polinoamelor în factori liniari, adică în factori de forma $z - a$.

Ecuația de gradul I, $a_0 z + a_1 = 0$ are o singură rădăcină, $z_1 = -\frac{a_1}{a_0}$ și are loc identitatea

$$\forall z, \ z \in C \ a_0 z + a_1 = a_0 \left(z + \frac{a_1}{a_0} \right) = a_0 (z - z_1).$$

Ecuația de gradul II,

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0,$$

are două rădăcini z_1 și z_2 și, după cum se știe,

$$\forall z, \ z \in C \ a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = a_0 (z - z_1)(z - z_2).$$

Relații analoage există oricare ar fi gradul ecuației.

Considerăm, de exemplu, un polinom de gradul V

$$P_5(z) = a_0 z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5.$$

Teorema fundamentală a algebrei ne spune că ecuația $P_5(z) = 0$ are cel puțin o rădăcină. Să o numim z_1, $z_1 \in C$. Pe baza teoremei lui Bézout putem afirma că $P(z)$ este divizibil prin $(z - z_1)$. Cîtul va fi un polinom de gradul IV, $P_4(z)$ și va avea loc identitatea

$$\forall z, \ z \in C \ \ P_5(z) = (z - z_1) \ P_4(z).$$

Tot pe baza teoremei fundamentale a algebrei, putem spune că ecuația $P_4(z) = 0$ admite cel puțin o rădăcină, s-o notăm cu z_2, diferită de

z_1 sau egală cu z_1. Fie $P_3(z)$ cîtul împărțirii lui $P_4(z)$ prin $z - z_2$. $P_3(z)$ va fi de gradul III și vom avea

$$\forall z,\ z \in C\ \ P_4(z) = (z - z_2)\ P_3(z).$$

Repetînd raționamentul, se ajunge la concluzia că există un număr complex z_3 și un polinom $P_2(z)$ de gradul II, astfel încît să aibă loc identitatea

$$\forall z,\ z \in C\ \ P_3(z) = (z - z_3)\ P_2(z);$$

există un număr complex z_4 și un polinom $P_1(z)$ de gradul I, astfel încît să aibă loc identitatea

$$\forall z,\ z \in C\ \ P_2(z) = (z - z_4)\ P_1(z);$$

în sfîrșit există un număr complex z_5 și un polinom $P_0(z)$, care se reduce la o constantă, s-o notăm cu A, astfel încît să aibă loc identitatea

$$\forall z,\ z \in C\ \ P_1(z) = (z - z_5)\ A.$$

Pentru a determina factorul A observăm că, dacă împărțim un polinom $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ prin $(z - z_1)$, primul termen al cîtului este a_0z^{n-1}; deci primul coeficient al cîtului este același ca al deîmpărțitului. Rezultă că primul coeficient al polinomului $P_4(z)$ este același cu al lui $P_5(z)$, adică a_0. Din același motiv, primul coeficient al lui $P_3(z)$ este același cu al lui $P_4(z)$, adică a_0 ș.a.m.d. Primul coeficient se păstrează de-a lungul tuturor împărțirilor. Deci, $A = a_0$.

Înmulțim aceste identități (și înlocuim A prin a_0). Obținem:

$$P_5P_4P_3P_2P_1 = (z - z_1)\ (z - z_2)\ (z - z_3)\ (z - z_4)\ (z - z_5)\ P_4P_3P_2P_1Pa_0$$

sau, simplificînd* cu $P_4P_3P_2P_1$,

$$\forall z,\ z \in C\ \ P_5(z) = a_0(z - z_1)\ \ (z - z_2)\ \ (z - z_3)\ \ (z - z_4)\ \ (z - z_5).$$

Același raționament se poate face oricare ar fi gradul polinomului. În cazul general, al polinomului de gradul n, $n_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$, se obține identitatea:

$$\forall z,\ z \in C\ a_0z^n + a_0z^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(z - z_1)\ \ (z - z_2)\ \ldots\ (z - z_n).$$

Orice polinom de gradul n se poate descompune în n factori liniari, diferiți sau egali.

* Avem dreptul de a face această simplificare. În adevăr, fie A, B, C trei polinoame, între care există relația $AB = AC$, A fiind diferit de polinomul nul. Împărțind ambii membri prin A (ceea ce este posibil, căci AB este divizibil prin A și cîtul este unic de asemenea și AC), obținem $A = C$. Așadar $AB = AC \Rightarrow B = C$, ceea ce înseamnă că avem dreptul să simplificăm identitatea $AB = AC$ prin A.

Se face abstracție de factorul constant a_0. Unii dintre factorii $z - z_1$, $z - z_2$, ... pot fi egali, căci se poate întîmpla ca unele dintre numerele z_1, z_2,... dintre care primul este o rădăcină a ecuației $P_n(z) = 0$, al doilea, a ecuației $P_n(z) : (z - z_1) = 0$ ș.a.m.d. să fie egali.

Această descompunere este unică (v. 2.2.7.).

2.2.5. **Factori egali.** Cînd există factori egali, apar în descompunerea polinomului puteri ale unor binoame, ca $(z - z_1)^2$, $(z - z_2)^3$ etc.

În general, descompunerea unui polinom în factori liniari este de forma:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_r)^{k_r}\ \ k_1,\ k_2, \ldots$$

..., $k_r \in N$, unde numerele z_1, z_2, ..., z_r sînt diferite unul de altul și

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n.$$

De exemplu:

$$P(z) = z^6 - 12z^5 + 57z^4 - 138z^2 + 180z^2 - 120z + 32 =$$

$$= (z - 4)\ (z - 1)^2\ (z - 2)^3,$$

după cum se poate verifica efectuînd calculele din partea dreaptă.

În acest caz, $a_0 = 1$, $z_1 = 4$, $k_1 = 1$, $z_2 = 1$, $k_2 = 2$, $z_3 = 2$, $k_3 = 3$.

2.2.6. **Observare.** Descompunerea polinoamelor în factori liniari este analoagă cu descompunerea numerelor naturale în factori primi. Rolul factorilor primi îl joacă aici factorii liniari, de forma $z - a$. Trebuie însă menționat că această analogie există numai dacă se admit și factori liniari $z - a$, în care a este un număr complex și descompunerea nu este totdeauna posibilă dacă se cere ca a să fie real. De exemplu, polinomul $z^2 + 1$ nu se poate descompune în factori liniari reali, dar acest lucru este posibil în complex: $z^2 + 1 = (z + i)\ (z - i)$.

2.2.7. **Unicitatea descompunerii.** Vom demonstra acum că descompunerea unui polinom în factori liniari se poate face numai într-un singur fel. Vom face demonstrația pe un caz numeric.

Am văzut mai sus că descompunerea polinomului

$$P(z) = z^6 - 12z^5 + 57z^4 - 138z^3 + 180z^2 - 120z + 32$$

este

$$P(z) = (z - 2)^3\ (z - 1)^2\ (z - 4).$$

Să presupunem că ar exista o altă descompunere a aceluiași polinom în factori liniari,

$$P(z) = k(z - a)\ (z - b)\ (z - c)\ (z - d)\ (z - e)\ (z - f).$$

Ar urma să aibă loc identitatea

$$k(z - a)\ (z - b)\ (z - c)\ (z - d)\ (z - e)\ (z - f) = (z - 2)^3\ (z - 1)^2\ (z - 4). \quad (1)$$

Pentru $z = 2$, partea dreaptă se anulează, căci factorul $z - 2$ se anulează. Rezultă că și partea stîngă a identității se anulează, ceea ce este posibil numai dacă

măcar unul dintre binoamele $z - a$, $z - b$ etc. se anulează pentru $z = 2$ (căci $k \neq 0$). Putem admite că factorul $z - a$ se anulează. Cu aceasta generalitatea demonstrației nu se restrînge, căci, de vreme ce unul dintre factorii din stînga se anulează pentru $z = 2$, n-avem decît să notăm cu a termenul al doilea al acelui binom. Din $2 - a = 0$ rezultă că

$$a = 2.$$

Înlocuim în (1) a prin 2, simplificăm* prin $z - 2$ și obținem identitatea

$$k(z - b)(z - c)(z - d)(z - e)(z - f) = (z - 2)^2 (z - 1)^2 (z - 4). \quad (2)$$

Repetăm raționamentul, conchidem că

$$b = 2,$$

înlocuim b prin 2, simplificăm prin $z - 2$ și obținem identitatea

$$k(z - c)(z - d)(z - e)(z - f) = (z - 2)(z - 1)^2 (z - 4). \quad (3)$$

Facem același raționament, ajungem la concluzia că

$$c = 2,$$

înlocuim în (3) c prin 2, simplificăm cu $z - 2$ și obținem identitatea

$$k(z - d)(z - e)(z - f) = (z - 1)^2 (z - 4). \quad (4)$$

Acum observăm că partea dreaptă se anulează pentru $z = 1$. Raționînd ca în cazul identității (2), ajungem la concluzia că

$$d = 1, \quad e = 1.$$

Înlocuim în (4) d și e prin 1, simplificăm prin $(z - 1)^2$ și obținem identitatea

$$k(z - f) = z - 4, \text{ adică } kz - kf = z - 4,$$

care ne dă, pe baza condiției ca două polinoame să fie identice,

$$k = 1, \qquad f = 4.$$

Am demonstrat că $a = b = c = 2$, $d = e = 1$, $f = 4$, $k = 1$. Deci descompunerea a doua este aceeași cu prima.

Factorii liniari care au apărut sînt de forma $z - p$ (coeficientul lui z este 1). Astfel de factori se numesc factori liniari *normalizați*, spre deosebire de factorii liniari obișnuiți. De exemplu, $2z - 3$ nu este normalizat, $z - \frac{3}{2}$ este normalizat.

Putem deci enunța:

Descompunerea unui polinom în factori liniari normalizați este unică.

Numai pe baza acestei teoreme se poate vorbi de descompunerea (articulat), nu de o descompunere a unui polinom în factori liniari.

* v. nota de la 2.2.4.

Subliniem că, dacă nu se cere ca factorii liniari să fie normalizați, descompunerea nu este unică. De exemplu

$$6z^2 - 5z + 1 = 6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right) = 3(2z - 1)\left(z - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(3z - 1) = (2z - 1)(3z - 1) = \frac{1}{10}(10z - 5)(6z - 2) = \ldots$$

2.2.8. **Numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice.** Din descompunerea polinoamelor în factori liniari, vom deduce o teoremă importantă cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice.

Considerăm o ecuație algebrică de gradul n

$$P(z) = 0.$$

Știm că polinomul poate fi descompus în n factori liniari,

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

unde a_0, coeficientul lui z^n, este diferit de zero, iar unele dintre numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pot fi egale între ele.

a) Vom presupune întîi că factorii liniari sînt diferiți.

Dacă înlocuim aici z prin z_1, factorul $z - z_1$ se anulează, deci $P(z_1) = 0$. La fel se arată că $P(z_2) = 0$, ..., $P(z_n) = 0$, deci ecuația $P(z) = 0$ are rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Dacă punem în locul lui z un număr α diferit de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, toți factorii $\alpha - z_1$, $\alpha - z_2$, ..., $\alpha - z_n$ vor fi diferiți de zero, a_0 este diferit de zero, deci produsul din dreapta este diferit de zero, deci $P(\alpha) \neq 0$, deci α nu este rădăcină a ecuației $P(z) = 0$. Aceasta înseamnă că ecuația $P_n(z) = 0$ nu admite ca rădăcină nici un număr diferit de $z_1, z_2, \ldots z_n$*.

Am obținut un prim rezultat: *o ecuație algebrică de gradul n are cel mult n rădăcini* (v. 1.2.3., obs. 1).

b) Acest rezultat nu este destul de precis, din cauză că unele dintre numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pot fi egale între ele.

Dacă în descompunerea

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

* Această demonstrație n-ar fi corectă dacă n-am ști că descompunerea unui polinom în factori liniari este unică. În adevăr, dacă ar exista o altă descompunere a aceluiași polinom

$$P(z) = a_0(z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_n'),$$

unde în partea dreaptă ar apărea măcar un singur factor care nu apare și în prima descompunere, de exemplu factorul $z - z_1'$, ecuația $P(z) = 0$ ar admite, pe lîngă rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_n$, și rădăcina z_1'.

a unui polinom apar doi factori egali, în care al doilea termen este același număr a, adică apare factorul $(z-a)^2$, se spune că numărul a este o rădăcină *dublă* a ecuației $P(z)=0$, dacă apar trei factori egali, adică apare $(z-a)^3$, se spune că numărul a este o rădăcină *triplă* a ecuației $P(z)=0$; ș.a.m.d.

În general, *dacă în descompunerea unui polinom în factori liniari apare factorul* $(z-a)^k$ *și nu apare o putere mai mare a lui* $(z-a)$, *se spune că numărul* a *este o rădăcină multiplă de ordinul* k *a ecuației* $P(z)=0$.

O rădăcină care nu este multiplă se numește rădăcină *simplă*.

Evident, o ecuație algebrică poate avea mai multe rădăcini multiple, fiecare dintre ele având ordinul ei de multiplicitate. De exemplu, dacă efectuăm operațiile indicate de expresia

$$P(z)=(z-5)^3(z-1)^4(z-7)^2(z-2)$$

și egalăm rezultatul cu zero, obținem o ecuație algebrică care are: rădăcina triplă 5, rădăcina cuadruplă 1, rădăcina dublă 7 și rădăcina simplă 2. În acest exemplu, ecuația este de gradul $3+4+2+1=10$ și există numai 4 numere care o satisfac: 5, 1, 7 și 2. Dar dacă considerăm rădăcina triplă ca trei rădăcini confundate, cea cuadruplă ca patru rădăcini confundate, iar cea dublă ca două rădăcini confundate, putem spune că ecuația are 10 rădăcini:

În general, dacă descompunerea unui polinom este de forma

$$P(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_r)^{k_r},$$

ecuația $P(z)=0$ are rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_r$, cu ordinele de multiplicitate $k_1, k_2, \ldots, k_r$ respectiv.

Acum avem un rezultat precis:

> O ecuație algebrică de gradul n are n rădăcini, fiecare rădăcină multiplă fiind socotită ca atîtea rădăcini confundate cît arată ordinul ei de multiplicitate.

2.2.9. **Observare.** Această teoremă ne arată cîte rădăcini are o ecuație algebrică, dar nu ne dă și mijlocul de a le afla. Este o *teoremă de existență*. Același caracter îl are și teorema fundamentală a algebrei. De asemenea și teorema cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari; ea spune că un polinom de gradul n *se poate* descompune în n factori liniari, dar ea nu ne dă și mijlocul de a-i afla.

● Aplicații

2.2.10. **Descompunerea în factori liniari și rezolvarea ecuațiilor.** Faptul că rădăcinile unui polinom se citesc din descompunerea lui în factori liniari, stabilește o legătură între rădăcinile ecuației algebrice $P(z)=0$ și descompunerea în factori a polinomului $P(z)$. A rezolva ecuația și a descompune polinomul în factori liniari

sînt două probleme echivalente: dacă știm să rezolvăm una din ele, știm s-o rezolvăm și pe cealaltă.

Exemple. 1) Ecuația bipătrată

$$4x^4-13x^2+3=0$$

are rădăcinile $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\sqrt{3}$, $x_4=-\sqrt{3}$. Deci:

$$4x^4-13x^2+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

sau, dacă descompunem 4 în $2\cdot 2$ și înmulțim unul dintre acești factori cu primul binom, iar celălalt cu al doilea,

$$4x^4-13x^2+3=(2x-1)(2x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).$$

Pentru că am putut rezolva ecuația am putut descompune polinomul în factori liniari.

2) Considerăm ecuația

$$P(x)=x^3+2x^2-x-2=0.$$

Scoatem în primii doi termeni x^2 în fața parantezei, apoi $x+2$.

$$P(x)=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1).$$

Rădăcinile ecuației sînt: -2, 1 și -1. Pentru că am reușit să descompunem polinomul $P(x)$ în factori, am putut rezolva ecuația.

2.2.11. **Formarea unei ecuații cînd se cunosc rădăcinile ei.** Pe baza aceleiași legături putem construi o ecuație algebrică care să aibă ca rădăcini niște numere date dinainte.

Exemple. 1) *Să se formeze o ecuație algebrică care să aibă rădăcina dublă* 3 *și rădăcina triplă* 1 *și să nu aibă alte rădăcini.*

Ecuația este

$$(x-3)^2(x-1)^3=x^5-9x^4+30x^3-46x^2+33x-9=0.$$

2) *Să se formeze o ecuație algebrică care să aibă rădăcinile* $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $5+2i$ *și* $5-2i$ *și să nu aibă alte rădăcini.*

Ecuația este

$$P(z)=(z-2-\sqrt{3})(z-2+\sqrt{3})(z-5-2i)(z-5+2i)=0.$$

Primii doi factori sînt de forma $(a-b)(a+b)$ cu $a=z-2$, $b=\sqrt{3}$ și ultimii doi factori sînt de aceeași formă. Deci:

$$P(z)=[(z-2)^2-3][(z-5)^2+4]=(z^2-4z+1)(z^2-10z+29)=0$$

sau

$$z^4-14z^3+70z^2-126z+29=0.$$

Se putea proceda și astfel: Se formează cu ajutorul sumei și produsului rădăcinilor trinomului care are rădăcinile $2+\sqrt{3}$ și $2-\sqrt{3}$, el este z^2-4z+1, apoi

trinomul care are rădăcinile $5 + 2i$ și $5 - 2i$, el este $z^2 - 10z + 29$, și se înmulțesc între ele.

2.2.12. **Condiția ca două ecuații să aibă aceleași rădăcini.** Fie

$$P(z) = 0 \text{ și } Q(z) = 0$$

două ecuații algebrice care au aceleași rădăcini, de aceleași ordine de multiplicitate: z_1 de ordinul k_1, z_2 de ordinul k_2, ..., z_r de ordinul k_r. Atunci au loc identitățile:

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r} \quad a_0 \neq 0;$$

$$Q(z) = b_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r} \quad b_0 \neq 0,$$

unde a_0 și b_0 sînt coeficienții primului termen din $P(z)$ și $Q(z)$. Dacă înmulțim expresia din dreapta a primei identități cu $\frac{b_0}{a_0}$ obținem expresia din dreapta a identității a doua, deci

$$Q(z) = \frac{b_0}{a_0} P(z),$$

ceea ce înseamnă că polinomul $Q(z)$ diferă de $P(z)$ prin factorul constant $\frac{b_0}{a_0}$ (sau $P(z)$ diferă de $Q(z)$ prin factorul constant $\frac{a_0}{b_0}$).

Reciproc, presupunem că polinomul $Q(z)$ diferă de $P(z)$ printr-un factor constant k, $k \neq 0$

$$Q(z) = kP(z),$$

și $P(z)$ are rădăcinile multiple $z_1, z_2, \dots, z_r$ cu ordinele $k_1, k_2, \dots, k_r$.

Atunci

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r}$$

iar

$$Q(z) = kP(z) = ka_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r},$$

ceea ce înseamnă că $Q(z)$ are tot rădăcinile $z_1, z_2, \dots, z_r$ cu ordinele $k_1, k_2, \dots, k_r$. Așadar:

> Două ecuații algebrice au aceleași rădăcini, cu aceleași ordine de multiplicitate, dacă și numai dacă diferă printr-un factor constant diferit de zero.

2.2.13. **Observări.** Pe baza acestei propoziții se poate spune că un polinom este determinat de rădăcinile sale pînă la un factor constant.

Aceasta înseamnă că dacă printr-un procedeu oarecare, de exemplu prin cel de la 2.2.11., am construit o ecuație care să aibă ca rădăcini niște numere date, orice altă ecuație care are aceleași rădăcini, rădăcinile multiple fiind de același ordin, se obține înmulțind ecuația găsită cu un factor constant arbitrar, diferit de zero.

2) Dacă scriem polinoamele $P(z)$ și $Q(z)$ desfășurat, condiția ca ele să difere printr-un factor constant se scrie:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = k(b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_n) \quad k \neq 0,$$

de unde egalînd coeficienții corespunzători:

$$a_0 = kb_0, \quad a_1 = kb_1, \dots, a_n = kb_n,$$

de unde:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

ceea ce înseamnă că coeficienții sînt proporționali.

Două ecuații algebrice au aceleași rădăcini, cu aceleași ordine de multiplicitate, dacă și numai dacă coeficienții lor sînt proporționali.

Menționăm că trecerea de la $a_i = kb_i$ la $\frac{a_i}{b_i} = k$ se poate face numai în relațiile în care $b_i \neq 0$. Dacă $b_i = 0$, se obține $a_i = 0$. Cînd două șiruri de numere sînt proporționale și un termen al unui șir este zero, termenul corespunzător din celălalt șir este de asemenea zero.

3) Condiția $k \neq 0$ este esențială, după cum arată exemplul următor: *Să se determine p și q, astfel încît ecuațiile*

$$P(z) = pz^2 + (p + q)z + 2p - 3q = 0 \text{ și } Q(z) = 2z^2 + 7z + 3 = 0$$

să aibă aceleași rădăcini.

Sistemul de ecuații

$$\frac{p}{2} = \frac{p + q}{7} = \frac{2p - 3q}{3} \text{ dă } p = q = 0.$$

Ar urma ca prima ecuație să fie $P(z) = 0z^2 + 0z + 0 = 0$, ceea ce este greșit, căci această ecuație are o infinitate de rădăcini, iar ecuația $Q(z) = 0$ are numai două. Greșeala provine de la faptul că, pentru $p = q = 0$, toate raporturile sînt egale cu zero — contrar condiției $k \neq 0$. Problema nu are soluție.

2.3. Relații între coeficienți și rădăcini

2.3.1. **Introducere.** Se știe că între coeficienții ecuației de gradul II

$$a_0z^2 + a_1z + a_2 = 0$$

și rădăcinile ei, z_1 și z_2 există relațiile

$$z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad z_1z_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

Acesta este numai un caz particular. Relații asemănătoare există între coeficienții și rădăcinile oricărei ecuații algebrice. De exemplu, în cazul ecuației de gradul III

$$a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0,$$

rădăcinile fiind z_1, z_2, z_3, relațiile sînt:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_1}{a_0},\quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{a_2}{a_0},\quad z_1z_2z_3 = -\frac{a_3}{a_0},$$

relații asemănătoare există în cazul ecuației de gradul IV, ș.a.m.d.

Pentru a putea deduce aceste formule, trebuie să stabilim în prealabil o propoziție ajutătoare.

2.3.2. **Calcularea unui produs de mai mulți factori liniari.** Este vorba de înmulțirea

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n).$$

În cazul unui produs de doi factori, se obține

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2;$$

înmulțind cu $z - z_3$, se obține

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3;$$

înmulțind cu $z - z_4$, se obține

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4)z^2 - (z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4)z + z_1z_2z_3z_4;$$

ș.a.m.d.

Se constată că, în toate cazurile, primul coeficient al produsului este 1;

coeficientul al doilea este suma numerelor z_1, z_2, ... luată cu semnul „—“;

coeficientul următor este suma tuturor produselor de cîte doi factori care se pot forma din numerele z_1, z_2, ... (în cazul produsului de doi factori, această „sumă“ se reduce la un singur termen);

coeficientul următor este suma tuturor produselor de cîte trei factori care se pot forma din numerele z_1, z_2, ..., luată cu semnul „—“ (în cazul produsului de trei factori, această sumă se reduce la un singur termen) ș.a.m.d.

Șirul acestor coeficienți se termină totdeauna cu produsul $\pm z_1z_2 \dots z_n$.

Ca să putem exprima acest fapt sub forma generală, introducem notațiile următoare:

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 + z_2 + \dots + z_n,\\
S_2 &= z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_{n-1}\,z_n,\\
S_3 &= z_1z_2z_3 + \dots + z_{n-2}\,z_{n-1}\,z_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
S_k &= z_1z_2 \dots z_k + \dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
S_n &= z_1z_2 \dots z_n.
\end{aligned}$$

Cu aceste notații, produsul de n factori se scrie:

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (-1)^k S_kz^{n-k} + (-1)^{k+1} S_{k+1}z^{n-k-1} + \dots + (-1)^n S_n. \qquad (S)$$

Vom demonstra această formulă prin inducție completă*.

Formula este adevărată pentru $n = 2$. În adevăr,

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 = z^2 - S_1z + S_2.$$

Presupunem acum că formula (S) este adevărată pentru n și vom demonstra că ea este adevărată pentru $n + 1$.

Înmulțim în (S) ambele părți cu $(z - z_{n+1})$. Obținem

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)(z - z_{n+1}) = (z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (-1)^k S_kz^{n-k} + (-1)^{k+1}S_{k+1}z^{n-k-1} + \dots + (-1)^n S_n)(z - z_{n+1}).$$

Efectuăm înmulțirea din partea dreaptă și obținem

$$\begin{aligned}
&z^{n+1} - (S_1 + z_{n+1})z^n + (S_2 + S_1z_{n+1})z^{n-1} + \dots\\
&\dots + (-1)^{k+1}(S_{k+1} + S_kz_{n+1})z^{n-k} + \dots + (-1)^{n+1} S_{n+1}
\end{aligned} \qquad (S')$$

Examinăm expresia $S_{k+1} + S_kz_{n+1}$, care figurează în termenul general. S_{k+1} este suma tuturor produselor de cîte $(k + 1)$ factori ce se pot forma cu numerele z_1, z_2, ..., z_n sau, ceea ce este același lucru, suma tuturor produselor de cîte $(k + 1)$ factori ce se pot forma din numerele z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1} excluzîndu-l pe z_{n+1}; S_k este suma tuturor produselor de k factori ce se pot forma cu numerele z_1, z_2, ..., z_n, deci S_kz_{n+1} este suma tuturor produselor de $(k + 1)$ factori ce se pot forma din numerele z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1} și care conțin factorul z_{n+1}. Rezultă că expresia $S_{k+1} + S_kz_{n+1}$ este suma tuturor produselor de $(k + 1)$ factori ce se pot forma din numerele z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1}. Afirmația analoagă se poate face despre toate parantezele din (S'), deci (S') se poate scrie

$$z^{n+1} - T_1z^n + T_2z^{n-1} + \dots + (-1)^{k+1} T_{k+1}z^{n-k} + \dots (-1)^{n+1} T_{n+1} \qquad (T)$$

(am pus $S_1 + z_{n+1} = T_1$, $S_2 + S_1z_{n+1} = T_2$, ș.a.m.d.), unde T_1 este suma nume-

---

* Este util ca în prealabil să se calculeze efectiv produsul de patru factori pornind de la produsul de trei factori:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = [z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3](z - z_4) = z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 + z_1z_4 + z_2z_4 + z_3z_4)z^2 - (z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4)z + z_1z_2z_3z_4.$$

Aici se văd direct cele două feluri de produse care apar în fiecare coeficient. De exemplu, în coeficientul lui z^2, primii trei termeni sînt toate produsele de cîte doi factori care se pot forma din numerele z_1, z_2, z_3, z_4 și care nu conțin z_4, iar termenii următori sînt toate produsele de cîte doi factori care se pot forma din aceleași numere și conțin z_4. Același lucru se constată și la ceilalți coeficienți.

relor $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$, T_2 este suma produselor de cîte doi factori ce se pot forma cu aceleaşi numere ş.a.m.d., adică

$$T_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1}$$
$$T_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_nz_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_{n+1} = z_1z_2 \ldots z_nz_{n+1}.$$

Rezultă că expresia (T) este de aceeaşi formă ca partea dreaptă din (S), ceea ce a fost de demonstrat.

2.3.3. **Formulele lui Vieta.** Pe baza formulei (S), putem demonstra uşor relaţiile anunţate la început.

Între coeficienţii unei ecuaţii algebrice

$$\text{(E)}\quad P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_kz^{n-k} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0$$

şi rădăcinile ei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ există relaţiile

$$\text{(V)}\quad \begin{aligned} S_1 &= z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} + z_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ S_2 &= z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ S_3 &= z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + \ldots + z_{n-2}\,z_{n-1}\,z_n = -\frac{a_3}{a_0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_k &= z_1z_2z_3 \ldots z_k + \ldots = (-1)^k\frac{a_k}{a_0},^{*} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= z_1z_2 \ldots z_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \end{aligned}$$

Reciproc, fiind dată ecuaţia $P(z) = 0$, dacă numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfac relaţiile (V), ele sînt rădăcinile ecuaţiei.

Simbolic,

$$[P(z_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n] \Leftrightarrow \text{(V)}.$$

Pentru a demonstra această teoremă, descompunem polinomul $P(z)$ în factori.

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_kz^{n-k} + \ldots + a_n =$$
$$= a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_k) \ldots (z - z_n)$$

* În partea dreaptă figurează semnul „+" (nici un semn) sau „—", după cum termenii din partea stîngă sînt formaţi dintr-un număr par sau impar de factori. Acest lucru se exprimă prin factorul $(-1)^k$, căci $(-1)^k$ este egal cu $+1$ sau cu -1, după cum k este par sau impar.

sau împărţind prin a_0,

$$z^n + \frac{a_1}{a_0}z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}z^{n-2} + \ldots + \frac{a_k}{a_0}z^{n-k} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} =$$
$$= (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_k) \ldots (z - z_n)$$

şi, înlocuind produsul din dreapta cu expresia dată de relaţia (S) de la 2.3.2.

$$z^n + \frac{a_1}{a_0}z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}z^{n-2} + \ldots + \frac{a_k}{a_0}z^{n-k} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} =$$
$$= z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n.$$

Egalînd coeficienţii corespunzători, se obţine:

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0},\quad S_2 = \frac{a_2}{a_0}, \ldots, S_k = (-1)^k\frac{a_k}{a_0}, \ldots, S_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0},$$

adică formulele (V).

Reciproc, să presupunem că între coeficienţii ecuaţiei (E) şi numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ există relaţiile (V), pe care le punem sub forma:

$$a_1 = -a_0S_1,\ a_2 = a_0S_2, \ldots, a_k = (-1)^k\ a_0S_k, \ldots, a_n = (-1)^n\ a_0S_n.$$

Înlocuind în partea stîngă a ecuaţiei (E) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prin aceste expresii şi scoţînd factorul comun a_0, obţinem:

$$P(z) = a_0(z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-1} + \ldots + (-1)^k S_kz^{n-k} + \ldots + (-1)^nS_n),$$

iar pe baza relaţiei (S):

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Acum se vede că $P(z_1) = 0$, $P(z_2) = 0, \ldots, P(z_n) = 0$, căci pentru $z = z_1$, $z = z_2, \ldots, z = z_n$, unul dintre factorii din dreapta se anulează, deci $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sînt rădăcinile ecuaţiei (E) — ceea ce a fost de demonstrat.

Dacă introducem notaţiile

$$\Pi(z - z_i) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$
$$S(z) = z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \ldots + (-1)^n S_n,$$

şi notăm cu (V) relaţiile care fac obiectul acestei teoreme, demonstraţia teoremei directe se poate rezuma prin schema

$$\underset{(1)}{[P(z_i) = 0]} \Rightarrow \left.\begin{matrix}[P(z) = a_0\Pi(z - z_i)] \\ \Pi(z - z_i) = S(z)\end{matrix}\right\} \underset{(3)}{\Rightarrow} P(z) = a_0S(z) \underset{(4)}{\Rightarrow} \text{(V)}$$
$$(2)$$

unde cifrele dintre paranteze arată pe ce se bazează relația respectivă, și anume:

(1) teorema cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari;

(2) formula după care se exprimă un produs de forma: $(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$, adică formula (S) de la 2.3.2.;

(3) tranzitivitatea relației de egalitate;

(4) condiția ca două polinoame să fie identice.

Schema demonstrației reciprocei este:

$$(V) \Rightarrow [P(z) = a_0 S(z)] \Big\} \Rightarrow [P[(z) = a_0 \Pi(z - z_i)] \Rightarrow [P(z_i) = 0].$$
$$(4)\ [S(z) = \Pi(z - z_i)] \Big\} (3) \qquad (1)$$
$$(2)$$

Relațiile (V) dintre coeficienții și rădăcinile unei ecuații algebrice se numesc și *formulele lui Vieta*, după numele matematicianului francez François Viète (Vieta), unul din fondatorii algebrei.

2.3.4. **Observări.** 1) Se constată că expresiile din stînga sînt simetrice* în raport cu rădăcinile ecuației. De exemplu, dacă în expresia

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$$

punem z_1 în loc de z_2, și invers, obținem o expresie egală cu ea. Același lucru se constată și dacă se schimbă z_1 cu z_3 sau z_2 cu z_3; de asemenea și oricare ar fi relația considerată.

Este firesc să fie așa, căci rădăcinile unei ecuații date sînt anumite numere, care rămîn aceleași oricum le-am nota sau numerota.

2) În cazul ecuației de gradul IV, relațiile se obțin astfel:

Prima relație nu prezintă nici o dificultate; primul membru este $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$; pentru relația a doua, se înmulțește fiecare rădăcină, pe rînd, cu toate rădăcinile următoare: z_1 cu z_2, z_1 cu z_3 ș.a.m.d.; pentru a scrie relația a treia, parcurgem șirul z_1, z_2, z_3, z_4 de la dreapta la stînga și suprimăm pe rînd cîte o rădăcină: suprimăm z_4 și obținem $z_1z_2z_3$, suprimăm z_3 și obținem $z_1z_2z_4$ ș.a.m.d.

3) Pentru unele probleme, este util ca, în cazul ecuației de gradul IV, relația a doua și a treia să fie puse sub forma:

$$(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1z_2 + z_3z_4 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$z_1z_2(z_3 + z_4) + z_3z_4(z_1 + z_2) = -\frac{a_3}{a_0}.$$

* Cuvîntul *simetric* are aici aproape același sens ca în geometrie. Cînd o figură admite o axă de simetrie, ea rămîne neschimbată atunci cînd schimbăm între ele cele două părți situate de o parte și de alta a axei — o expresie simetrică în raport cu două litere rămîne neschimbată dacă schimbăm între ele cele două litere.

◉ Aplicații

Formulele lui Vieta joacă un rol important în teoria ecuațiilor, rol care apare într-un studiu mai adîncit al algebrei. Aici se vor da numai cîteva aplicații imediate.

2.3.5. **Cazul cînd ecuația are coeficienții numerici.** *Să se rezolve ecuația*

$$4z^3 - 24z^2 + 65z - 87 = 0$$

cînd se dă că între rădăcinile ei există relația $z_1 + z_2 = z_3$.

Scriem formulele lui Vieta:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 6, \tag{1}$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{65}{4}, \tag{2}$$

$$z_1z_2z_3 = \frac{87}{4} \tag{3}$$

și relația dată:

$$z_1 + z_2 = z_3. \tag{4}$$

A rezolva ecuația propusă revine la rezolvarea sistemului format din ecuațiile (1) — (3). Se dă, în plus, relația (4), avem deci un sistem de 4 ecuații cu 3 necunoscute.

Din (1) și (4) rezultă că

$$z_1 + z_2 = 3,\ z_3 = 3 \tag{5}$$

Punem (2) sub forma

$$z_1z_2 + z_3(z_1 + z_2) = \frac{65}{4} \tag{2'}$$

și, înlocuind aici z_3 și $z_1 + z_2$ prin valorile date de (5), obținem

$$z_1z_2 = \frac{29}{4}. \tag{6}$$

Din (5) și (6) rezultă că z_1 și z_2 sînt rădăcinile ecuației

$$4x^2 - 12z + 29 = 0;\ z_{1,2} = \frac{3 + 2i\sqrt{5}}{2}.$$

Se constată că și ecuația (3), pe care n-am folosit-o, este satisfăcută, căci $(z_1z_2)z_3 = \frac{29}{4} \cdot 3 = \frac{87}{4}$,

Rădăcinile ecuației sînt: $z_{1,2} = \frac{3 + 2i\sqrt{5}}{2}$, $z_3 = 3$.

2.3.6. **Observări:** 1) După ce am aflat că $z_3 = 3$, putem împărți partea stîngă a ecuației date prin $z - 3$. Cîtul este $4z^2 - 12z + 29$ și dă rădăcinile z_1 și z_2.

2) După ce am obținut relațiile (5), putem folosi relația (3). Înlocuind aici z_3 prin 3, se obține (6) și se poate continua ca mai înainte.

2.3.7. **Cazul cînd unul dintre coeficienții ecuației este variabil.** Dacă adoptăm soluția dată la început, relația (3) rămîne nefolosită. Aceasta înseamnă că am rezolvat ecuația fără să cunoaștem termenul liber (știind în schimb că $z_1 + z_2 = z_3$). Am rezolvat deci problema următoare:

Să se rezolve ecuația

$$4z^3 - 24z^2 + 56z + a = 0$$

cînd se dă că $z_1 + z_3 = z_3$ *și să se determine valoarea lui a.*

În adevăr, după ce am aflat rădăcinile, relația (3), care se scrie acum

$z_1z_2z_3 = -\frac{a}{4}$ (dar a rămas nefolosită) ne dă

$$-\frac{a}{4} = \frac{3 - 2i\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 + 2i\sqrt{5}}{2} \cdot 3 = \frac{87}{4}; \quad a = -87.$$

Sistemul format de ecuațiile (1), (2), $z_1z_2z_3 = -\frac{4}{a}$, și (4) are o soluție dacă și numai dacă $a = -87$.

Dacă mergem pe calea indicată în observarea 2) de mai sus, relația (2) rămîne nefolosită. Deci, pe această cale se poate rezolva problema:

Să se rezolve ecuația:

$$4z^3 - 24z^2 + az - 87 = 0.$$

știind că $z_1 + z_2 = z_3$ *și să se determine valoarea lui a.*

2.3.8. **Cazul cînd toți coeficienții ecuației sînt variabili.** *Să se determine condiția necesară și suficientă pe care trebuie s-o îndeplinească coeficienții ecuației*

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

pentru ca între rădăcinile ei să existe relația $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$.

Aplicație numerică. Să se verifice că ecuația

$$z^4 - 12z^3 + 53z^2 - 102z + 70 = 0$$

satisface condiția găsită și să se rezolve.

Scriem relațiile lui Vieta, precum și relația dată

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -a, \tag{1}$$

$$(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1z_2 + z_3z_4 = b, \tag{2}$$

$$z_1z_2(z_3 + z_4) + z_3z_4((z_1 + z_2) = -c, \tag{3}$$

$$z_1z_2z_3z_4 = d, \tag{4}$$

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4. \tag{5}$$

Avem aici un sistem de 5 ecuații cu 4 necunoscute, z_1, z_2, z_3, z_4. Pentru ca între rădăcinile ecuației să existe relația (5), este necesar și suficient ca acest sistem să fie compatibil.

Rezolvăm sistemul format din ecuațiile (1), (2), (4) și (5).

Din (1) și (5) rezultă

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = -\frac{a}{2}, \tag{6}$$

Înlocuind în (2), obținem

$$z_1z_2 + z_3z_4 = b - \frac{a^2}{4}. \tag{7}$$

Ecuațiile (4) și (7) ne dau suma și produsul numerelor $q = z_1z_2$, $r = z_3z_4$. Cunoscînd $q = z_1z_2$ și, din (6), $z_1 + z_2 = -\frac{a}{2}$, putem afla z_1 și z_2; analog, cunoscînd $z_3z_4 = r$ și $z_3 + z_4 = -\frac{a}{2}$, putem afla z_3 și z_4. Deci rădăcinile ecuației se pot afla fără a folosi ecuația (3).

Soluțiile sistemului format din ecuațiile (1), (2), (4) și (5) fiind aflate, totul depinde de rezultatul care se obține înlocuind în (3) x_1, x_2, x_3 și x_4 prin valorile lor. Pentru a face înlocuirea, nu este necesar să aflăm efectiv rădăcinile. Pe baza relațiilor (6), ecuația (3) se scrie

$$z_1z_2\left(-\frac{a}{2}\right) + z_3z_4\left(-\frac{a}{2}\right) = -c; \quad \frac{a}{2}(z_1z_2 + z_3z_4) = c,$$

iar pe baza ecuației (7), ea devine

$$\frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right) = c$$

sau

$$(R) \qquad a^3 - 4ab + 8c = 0.$$

Între rădăcinile ecuației există relația $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ dacă și numai dacă între coeficienții ecuației există această relație,

$$[z_1 + z_2 = z_3 + z_4] \Leftrightarrow [a^3 - 4ab + 8c = 0].$$

În adevăr, sistemul format de ecuațiile (1), (2), (4) și (5) este compatibil, iar relația (R) exprimă faptul că orice soluție a acestui sistem satisface și ecuația (3). Dacă sistemul complet este compatibil, acea soluție satisface și ecuația (3), deci are loc relația (R), ceea ce înseamnă că (R) este o condiție necesară. Reciproc, dacă relația (R) are loc, orice soluție a ecuațiilor (1), (2), (4) și (5) satisface și ecuația (3), deci sistemul este compatibil — ceea ce înseamnă că (R) este o condiție suficientă.

În aplicația numerică, $a = -12$, $b = 53$, $c = -102$, $d = 70$.

$$(-12)^3 - 4(-12)\,53 - 8 \cdot 102 = 0,$$

deci ecuația satisface condiția (R). Ecuațiile (7) și (4) sînt în acest caz

$$z_1z_2 + z_3z_4 = 17, \tag{7'}$$

$$(z_1z_2)(z_3z_4) = 70 \tag{4'}$$

z_1z_2 și z_3z_4 sînt rădăcinile ecuației

$$t^2 - 17t + 70 = 0, \text{ care dă } t_1 = 7,\ t_2 = 10,$$

deci

$$z_1z_2 = 7, \qquad z_3z_4 = 10. \tag{8}$$

Ecuația (6) se scrie

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = 6. \tag{9}$$

Relațiile (8) și (9) arată că z_1, z_2 și z_3, z_4 sînt, respectiv, rădăcinile ecuațiilor

$$t^2 - 6t + 7 = 0 \text{ și } t^2 - 6t + 10 = 0,$$

care dau:

$$z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2},\ z_{3,4} = 3 \pm \mathrm{i}.$$

2.3.9. **Observare.** Se constată că în condiția aflată nu figurează coeficientul d. Acest lucru nu are nimic surprinzător. El arată că, dacă între rădăcinile unei ecuații de gradul IV există relația $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ și schimbăm ultimul coeficient (de exemplu, dacă în ecuația din enunțul problemei punem în loc de 70 orice alt număr) rădăcinile se schimbă, dar între ele va exista aceeași relație.

Relația aflată nu trebuie să cuprindă neapărat toți coeficienții. Ea poate să cuprindă chiar numai un singur coeficient. De exemplu, condiția necesară și suficientă ca suma rădăcinilor ecuației $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ să fie $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ este $p = -1$; q și r sînt arbitrari.

2.3.10. **Procedeul prin identificare.** Reluăm problema precedentă (2.3.8.) și fie z_1, z_2, z_3, z_4 rădăcinile ecuației propuse. z_1 și z_2 sînt rădăcinile unei ecuații de forma $z^2 + pz + q = 0$, z_3 și z_4 sînt rădăcinile unei ecuații $z^2 + p'z + r = 0$, $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ dacă și numai dacă

$p' = p$. Deci ecuația îndeplinește condiția $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ dacă și numai dacă poate fi pusă sub forma

$$(z^2 + pz + q)(z^2 + pz + r) = 0$$

sau, după efectuarea înmulțirii,

$$z^4 + 2pz^3 + (p^2 + q + r)z^2 + p(q + r)z + qr = 0.$$

Egalînd coeficienții acestei ecuații cu coeficienții ecuației propuse, obținem sistemul

$$2p = a, \tag{1'}$$

$$p^2 + q + r = b, \tag{2'}$$

$$p(q + r) = c, \tag{3'}$$

$$qr = d. \tag{4'}$$

Urmează să găsim condiția necesară și suficientă ca acest sistem să fie compatibil. Rezolvăm sistemul format din ecuațiile (1'), (2') și (4').

Ecuația (1') dă $p = \frac{a}{2}$. Introducînd în (2'), se obține $q + r = b - \frac{a^2}{4}$; această ecuație împreună cu (4') ne dă q și r. Deci p, q și r se pot afla din ecuațiile (1'), (2') și (4'). Necesar și suficient ca sistemul să fie compatibil este ca valorile aflate pentru p, q și r să satisfacă și (3'). Înlocuind în (3') p prin $\frac{a}{2}$ și $q + r$ prin $b - \frac{a^2}{4}$, se obține condiția (R) de mai înainte.

În cazul ecuației cu coeficienți numerici, ecuațiile (1'), (3') și (4') devin

$$2p = -12,\ p(q + r) = -102,\ qr = 70.$$

Prima dintre aceste ecuații dă $p = -6$, a doua devine acum $q + r = 17$. Această ecuație, împreună cu ultima dau $q = 7$, $r = 10$ (sau $q = 10$, $r = 7$, ceea ce revine la același lucru). Ecuațiile care dau z_1, z_2 și z_3, z_4 sînt, respectiv,

$$t^2 - 6t + 7 = 0 \text{ și } t^2 - 6t + 10 = 0$$

aceleași care au apărut mai înainte.

2.3.11. **Observare.** Analogia dintre acest procedeu și cel precedent este izbitoare. Ecuațiile (1') — (4') se obțin din ecuațiile (1) — (4) înlocuind $z_1 + z_2$ și $z_3 + z_4$ prin $-p$, z_1z_2 prin q și z_3z_4 prin r. Aceasta se explică prin faptul că atunci cînd aplicăm formulele lui Vieta, procedăm, în fond, tot prin identificare; căci aceste formule se obțin prin identificare. Se identifică, în cazul de față, polinomul dat cu polinomul care se obține efectuînd înmulțirea $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$.

În procedeul al doilea se pornește, în mod tacit, tot de la produsul $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, dar factorii se grupează astfel: primii doi factori dau

un produs $z^2 + pz + q$, ultimii doi — un produs $z^2 + p'z + r$, deci polinomul se identifică cu produsul $(z^2 + pz + q)(z^2 + p'z + r)$ și, datorită condiției $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$, se înlocuiește în prealabil p' prin p. Deci, procedeul al doilea ocolește formulele lui Vieta: se merge direct la sursă care este identificarea. Avantajul constă în faptul că notația este mai simplă (în primul procedeu, $q = z_1z_2$ și $r = z_3z_4$ se introduc ca necunoscute ajutătoare, pe cînd în procedeul al doilea aceste necunoscute apar de la început) și condiția $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ se introduce de la început.

2.3.12. **Recomandări.** 1) Rezolvarea problemelor de acest tip constă în eliminarea necunoscutelor $z_1, z_2, ..., z_n$ din sistemul de $n + 1$ ecuații format din cele n relații ale lui Vieta și relația dată. Această eliminare se poate face în mai multe moduri. Dacă nu se procedează cu suficientă grijă, se deduce din ecuațiile date o relație între coeficienți, dar din calcule rezultă numai implicația într-un singur sens; în cazul de față:

$$[z_1 + z_2 = z_3 + z_4] \Rightarrow [a^3 - 4ab + 8c = 0].$$

Cu alte cuvinte, se obține numai condiția necesară. Demonstrația implicației în celălalt sens (condiția aflată este și suficientă) cere de multe ori calcule foarte laborioase, iar fără această demonstrație problema nu este complet rezolvată.

În lipsa unei teorii generale a eliminării, care nu se face în școală, se poate folosi regula următoare — pe care am aplicat-o în problema precedentă.

Fiind dat un sistem de $n + 1$ ecuații cu n necunoscute cu parametrii $a, b, ..., c$, pentru a găsi condiția necesară și suficientă ca sistemul să fie compatibil, se aleg n ecuații și se rezervă una. Sistemul format din cele n ecuații se rezolvă, iar valorile aflate pentru necunoscute se introduc în ecuația rezervată. Relația (R) *între parametri care se obține astfel este condiția căutată.*

În exemplul nostru, am ales sistemul format din ecuațiile (1), (2), (4) și (5) și am rezervat ecuația (3).

2) În unele probleme, cînd se dă o relație (S) între rădăcini, se află ușor o rădăcină a ecuației. Atunci se obține foarte ușor o relație (R) între coeficienți punînd condiția ca valoarea aflată să satisfacă ecuația, dar acest procedeu nu este corect.

În adevăr, se demonstrează numai implicația $(S) \Rightarrow (R)$; rămîne să se demonstreze și implicația inversă $(R) \Rightarrow (S)$; cu alte cuvinte, se găsește numai condiția necesară, nu și cea suficientă.

2.4. Rădăcini multiple

2.4.1. **Obiectul acestui paragraf.** Noțiunea de rădăcină multiplă este cunoscută (2.2.8.) De exemplu, dacă descompunerea unui polinom $P(z)$ este

$$P(z) = (z - 3)^2 (z - 5)^3 (z - 7),$$

ecuația $P(z) = 0$ are rădăcina dublă 3, rădăcina triplă 5 și rădăcina simplă 7.

În cele ce urmează, vom arăta că există o legătură între rădăcinile multiple ale unei ecuații algebrice $P(z) = 0$ și rădăcinile derivatelor* lor $P'(z) = 0$, $P''(z) = 0$ ș.a.m.d.

Pentru a arăta în linii mari despre ce este vorba, considerăm, de exemplu, ecuația

$$P(z) = (z - a)^4 = 0,$$

care are rădăcina cuadruplă $z = a$.

Derivatele consecutive sînt

$$P'(z) = 4(z - a)^3, \quad P''(z) = 12(z - a)^2, \quad P'''(z) = 24(z - a), \quad P^{IV}(z) = 24.$$

Se constată că numărul a anulează primele trei derivate, dar nu anulează derivata a patra și, pe măsură ce luăm derivatele consecutive, ordinul de multiplicitate al rădăcinii scade cu cîte o unitate.

Ecuația	$P(z) = 0$	$P'(z) = 0$	$P''(z) = 0$	$P'''(z) = 0$	$P^{IV}(z) = 0$
Ordinul rădăcinii	4	3	2	1	0

Deoarece intervin funcții (polinomiale) de o variabilă complexă, trebuie să extindem noțiunea de derivată; la analiză s-au tratat numai funcții reale de variabilă reală.

2.4.2. **Derivata unei funcții întregi de o variabilă complexă**

Derivata unui polinom cu coeficienți complecși

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_{n-1}z + a_n, \; z \in C$$

este polinomul

$$P'(z) = na_0z^{n-1} + (n - 1)a_1z^{n-2} + ... + a_{n-1}.$$

De exemplu, derivata polinomului

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^3 - (\sqrt{2} + 3i)z^2 + 5iz - (1 + i)$$

este

$$P'(z) = 4z^3 + 3(1 - 2i)z^2 - 2(\sqrt{2} + 3i)z + 5i.$$

În analiză, această propoziție se demonstrează, pe baza definiției cunoscute a derivatei unei funcții; pentru cazul polinoamelor cu coeficienți complecși, ea este *definiția* derivatei.

Pornind de la această definiție, formală, a derivatei, avem dreptul să aplicăm regulile cunoscute pentru a calcula derivata oricărei expresii întregi.

---

* Este o exprimare prescurtată; există derivata unei funcții, nu a unei ecuații. Sensul acestei expresii rezultă din modul în care o folosim.

În adevăr, fie $A(x)$ și $B(x)$ două polinoame cu coeficienți reali și $C(x) = A(x)\,B(x)$ produsul lor. În analiză se demonstrează că

$$(*) \qquad C'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x).$$

Deoarece produsul $C(x)$ este tot un polinom, ca și $A(x)$ și $B(x)$, derivata sa poate fi calculată și fără această formulă: se efectuează înmulțirea $A(x)\,B(x)$ și se derivează produsul obținut. Rezultatele trebuie să concorde; relația (*) este o identitate. De exemplu, dacă

$$A(x) = x^2 - 5x + 2, \quad B(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Avem:

$$C(x) = A(x)B(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + x + 2.$$

Dacă calculăm derivata polinomului $C(x)$, obținem

$$C'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 1;$$

dacă aplicăm formula (*), avem

$$A'(x) = 2x - 5, \quad B'(x) = 2x + 3$$

deci

$$C'(x) = (2x - 5)(x^2 + 3x + 1) + (2x + 3)(x^2 - 5x + 2).$$

Are loc identitatea:

$$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + x + 2 = (2x - 5)(x^2 + 3x + 1) + (2x + 3)(x^2 - 5x + 2),$$

ceea ce se poate verifica, efectuînd calculele din partea dreaptă.

Așadar, relația (*) este o identitate. Ea are un caracter pur algebric, căci intervin numai adunări și înmulțiri de polinoame.

Să presupunem acum că $A(x)$ și $B(x)$ sînt polinoame cu coeficienți complecși, deci $C(x)$ este de asemenea un polinom cu coeficienți complecși.

Tot ce s-a spus aici despre derivata unui produs rămîne adevărat. În adevăr, conform definiției derivatei unui polinom cu coeficienți complecși, derivata $A'(x)$, $B'(x)$ și $C'(x)$ se calculează după aceleași formule ca în cazul polinoamelor cu coeficienți reali și operațiile cu polinoame se fac după aceleași reguli indiferent dacă coeficienții lor sînt reali sau complecși. Rezultă că formula (*) este valabilă și în cazul polinoamelor cu coeficienți complecși.

2.4.3. Definiție

Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k ($k \in N$) a ecuației algebrice $P(z) = 0$ dacă și numai dacă $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)^k$, iar cîtul $C(z) = P(z) : (z - a)^k$ nu se anulează pentru $z = a$.

Simbolic: [a răd. mult. k, $P(z) = 0$] $\Leftrightarrow$
[$\exists C(z)$ astfel încît $\forall z$, $z \in C$ $P(z) = (z - a)^k\,C(z)$ și $C(a) \neq 0$].

(„a răd. mult. k“ trebuie citit „a este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației“).

De exemplu, după cum am văzut (2.4.1.), ecuația

$$P(z) = (z - 1)^2\,(z - 5)^3\,(z - 7)$$

are rădăcina dublă 1, rădăcina triplă 5 și rădăcina simplă 7. Polinomul $P(z)$ este divizibil prin $(z - 1)^2$ și cîtul

$$P(z) : (z - 1)^2 = (z - 5)^3\,(z - 7)$$

nu se anulează pentru $z = 1$; $P(z)$ este divizibil prin $(z - 5)^3$ și cîtul

$$P(z) : (z - 5)^3 = (z - 1)^2\,(z - 7)$$

nu se anulează pentru $z = 5$; $P(z)$ este divizibil prin $(z - 7)$ și cîtul

$$P(z) : (z - 7) = (z - 1)^2\,(z - 5)^3$$

nu se anulează pentru $z = 7$.

2.4.4. **Observare.** Se poate demonstra că această definiție a rădăcinii multiple este echivalentă cu cea dată înainte (2.2.8).

De asemenea, condiția $C(a) \neq 0$ este echivalentă cu condiția ca polinomul să nu fie divizibil printr-o putere mai mare a lui $z - a$ decît k. Deci:

Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației algebrice $P(z) = 0$ dacă și numai dacă polinomul $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)^k$, ($k \in N$), și nu este divizibil prin $(z - a)^{k+1}$.

Bineînțeles, dacă polinomul $P(z)$ nu este divizibil prin $(z - a)^{k+1}$, el nu va fi divizibil prin nici o putere a lui $(z - a)$ mai mare decît k.

2.4.5. **Propoziție auxiliară. O rădăcină $z = a$ a ecuației algebrice $P(z) = 0$ este rădăcină multiplă de ordinul k dacă și numai dacă este rădăcină multiplă de ordinul $k - 1$ a derivatei $P'(z) = 0$.**

Simbolic,

[a răd. mult. k $P(z) = 0$] $\Leftrightarrow$ [a răd. mult. $(k - 1)$ $P'(z) = 0$].

În adevăr, fie $P(z) = 0$ o ecuație algebrică și fie a o rădăcină multiplă a ei de ordinul k. Conform definiției, există un polinom $C(z)$ astfel ca să aibă loc identitatea

$$P(z) = (z - a)^k\,C(z), \quad C(a) \neq 0.$$

Această relație exprimă faptul că dacă efectuăm calculele din partea dreaptă obținem polinomul $P(z)$. Rezultă că dacă vom deriva expresia din dreapta, vom obține o expresie care, efectuată, va da un

polinom identic cu polinomul $P'(z)$. Cu alte cuvinte, avem dreptul de „a deriva" identitatea. Obținem identitatea

$$P'(z) = k(z-a)^{k-1} C(z) + (z-a)^k C'(z)$$

(am aplicat regula după care se derivează un produs).

Scoatem în partea dreaptă factorul comun $(z-a)^{k-1}$:

$$P'(z) = (z-a)^{k-1}[kC(z) + (z-a) C'(z)].$$

Factorul $(z-a)^{k-1}$ arată că numărul a este rădăcină multiplă cel puțin de ordinul $k-1$; rămîne să examinăm expresia din paranteza mare. Pentru $z = a$, termenul al doilea, $(z-a) C'(z)$, se anulează, iar primul termen dă $k\,C(a)$, care este diferit de zero, căci, prin ipoteză, $C(a) \neq 0$. Rezultă că expresia dintre paranteze nu se anulează pentru $z = a$, deci a este rădăcină multiplă de ordinul $k-1$ a ecuației $P'(z) = 0$.

Reciproc, presupunem că o rădăcină a a ecuației algebrice $P(z) = 0$ este rădăcină multiplă de ordinul $k-1$ a derivatei $P'(z) = 0$. Ce ordin de multiplicitate are ea pentru ecuația inițială $P(z) = 0$? Fie s ordinul de multiplicitate. Atunci, după cum am demonstrat, numărul a este rădăcină multiplă de ordinul $s-1$ a derivatei, deci

$$s - 1 = k - 1, \text{ de unde } s = k,$$

ceea ce a fost de demonstrat.

Pe baza acestei propoziții putem demonstra teorema anunțată.

2.4.6. **Teoremă.**

> Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a unei ecuații algebrice $P(z) = 0$ dacă și numai dacă anulează polinomul $P(z)$ și primele sale $k-1$ derivate, și nu anulează derivata de ordinul k.

$$[a \text{ răd. mult. } k \; P(z) = 0] \Leftrightarrow [P(a) = 0, \; P'(a) = 0, \; P''(a) = 0 \ldots$$
$$P^{(k-1)}(a) = 0, \; P^{(k)}(a) \neq 0].$$

Vom face demonstrația pe cazul $k = 4$. Va trebui să demonstrăm că numărul a este rădăcină cuadruplă a ecuației $P(z) = 0$ dacă și numai dacă $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $P''(a) = 0$, $P'''(a) = 0$, $P^{IV}(a) \neq 0$.

Considerăm ecuațiile

$$P(z) = 0, \; P'(z) = 0, \; P''(z) = 0, \; P'''(z) = 0, \; P^{IV}(z) = 0.$$

Fiecare dintre ele este derivata celei precedente.

Privim primele două ecuații. Deoarece numărul a este rădăcină cuadruplă a primei ecuații, el este, conform propoziției auxiliare, rădăcină triplă a ecuației $P'(z) = 0$. Acum considerăm ecuația a doua și a treia, $P'(z) = 0$, $P''(z) = 0$, și privim $P'(z)$ ca polinomul dat, deci $P''(z)$ ca derivata sa. Tot propoziția auxiliară ne arată că numărul a este rădăcină dublă a ecuației $P''(z) = 0$. Repetăm raționamentul, conchidem că numărul a este rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$. În sfîrșit, considerăm ultimele două ecuații și privim $P'''(z) = 0$ ca ecuația dată, deci $P^{IV}(z) = 0$ ca derivata ei. Deoarece numărul a este rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$, rezultă că $P^{IV}(a) \neq 0$.

Pentru a demonstra implicația inversă, parcurgem același șir de ecuații de la dreapta spre stînga.

Considerăm ecuațiile $P'''(z) = 0$, $P^{IV}(z) = 0$, dintre care a doua este derivata primei. Deoarece $P'''(a) = 0$, $P^{IV}(a) \neq 0$, numărul a este, conform definiției, rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$; a fiind rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$ și anulînd $P''(z)$ (căci s-a presupus $P''(a) = 0$), este, conform propoziției auxiliare, rădăcină dublă a ecuației $P''(z) = 0$. Continuînd în acest fel, se ajunge la concluzia că a este rădăcină cuadruplă a ecuației $P(z) = 0$, ceea ce a fost de demonstrat.

În particular, a este o rădăcină *dublă* a ecuației algebrice $P(z) = 0$, dacă și numai dacă $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $P''(a) \neq 0$; a este rădăcină *triplă*, dacă și numai dacă $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $P''(a) = 0$, $P'''(a) \neq 0$ ș.a.m.d.

Aplicații

2.4.7. **Rezolvarea unei ecuații care are o rădăcină multiplă.** *Se consideră ecuația*

$$P(z) = z^4 - 11z^3 + 42z^2 + mz + n = 0.$$

Să se determine m și n astfel ca ecuația să aibă o rădăcină triplă și să se rezolve ecuația.

Rădăcina triplă trebuie să anuleze $P'(z)$ și $P''(z)$ și să nu anuleze $P'''(z)$.

$$P'(z) = 4z^3 - 32z^2 + 84z + m, \; P''(z) = 12z^2 - 66z + 84,$$
$$P'''(z) = 24z - 66.$$

Ecuația $P''(z) = 0$ are rădăcinile 2 și $\frac{7}{2}$, deci rădăcina triplă nu poate fi decît unul din aceste numere. Nici unul din ele nu anulează $P'''(z)$, deci rădăcina va fi strict triplă.

a) Înlocuim z prin 2 în $P'(z)$ și $P(z)$. Sistemul

$$P'(2) = 68 + m = 0, \; P(2) = 96 + 2m + n = 0, \text{ dă}$$
$$m = -68, \; n = 40.$$

Ecuația este

$$P(z) = z^4 - 11z^3 + 42z^2 - 68z + 40 = 0.$$

$P(z)$ este divizibil prin $(z-2)^3$. Facem împărțirea cu ajutorul schemei lui Horner; împărțim $P(z)$ prin $z-2$, cîtul prin $z-2$ și noul cît iarăși prin $z-2$:

1	−11	42	−68	40	2
1	− 9	24	−20	0	2
1	− 7	10	0		2
1	− 5	0			

Cîtul este $z-5$, deci rădăcina a patra este $z=5$.

b) Repetăm procedeul punînd condiția ca rădăcina triplă să fie $\frac{7}{2}$. $P'\left(\frac{7}{2}\right)=0$ dă $m=-\frac{245}{4}$, $P\left(\frac{7}{2}\right)=0$ dă apoi $n=\frac{343}{16}$. Deci ecuația este

$$z^4-11z^3+42z^2-\frac{245}{4}z+\frac{343}{16}=0$$

sau, dacă scăpăm de numitori,

$$16z^4-176z^3+672z^2-980z+343=0.$$

Împărțirile se fac ca mai înainte, prin schema lui Horner și se obține $z_1=\frac{1}{2}$.

2.4.8. **Observare.** Problema se poate rezolva cu ajutorul formulelor lui Vieta. Rădăcinile se notează cu α, α, α, β. Primele două dintre relațiile lui Vieta dau ecuațiile $3\alpha+\beta=11$, $\alpha(\alpha+\beta)=14$, cu soluțiile $\alpha_1=2$, $\beta_1=5$, $\alpha_2=\frac{7}{2}$, $\beta_2=\frac{1}{2}$. Următoarele două dintre relațiile lui Vieta dau m și n.

Se poate proceda și prin identificare: polinomul dat se identifică cu $(x-\alpha)^3(x-\beta)$.

2.4.9. **Condiția ca ecuația $z^3+pz+q=0$ să aibă o rădăcină dublă.** *Să se determine condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o satisfacă numerele complexe p și q pentru ca ecuația*

$$P(z)=z^3+pz+q=0$$

să aibă o rădăcină dublă.

Luăm derivatele:

$$P'(z)=3z^2+p,\quad P''(z)=6z.$$

Numărul z este rădăcina dublă a ecuației propuse dacă și numai dacă satisface ecuațiile

$$P(z)=z^3+pz+q=0 \tag{1}$$

$$P'(z)=3z^2+p=0 \tag{2}$$

iar

$$P''(z)=6z\neq 0. \tag{3}$$

Presupunem $p\neq 0$. Atunci ecuația (2) nu admite rădăcina $z=0$. Cum $P''(z)$ se anulează numai pentru $z=0$, condiția (3) este îndeplinită și rămîne să găsim condiția ca ecuațiile (1) și (2) să aibă o rădăcină comună.

Înmulțim* ecuația (1) cu 3, ecuația (2) cu $(-z)$ și le adunăm. Obținem ecuația

$$Q(z)=3P(z)-zP'(z)=2pz+3q=0. \tag{4}$$

Condiția ca ecuațiile (1) și (2) să aibă o rădăcină comună este echivalentă cu condiția ca ecuațiile (2) și (4) să aibă o rădăcină comună. În adevăr, fie α o rădăcină comună a ecuațiilor (1) și (2), adică $P(\alpha)=0$ și $P'(\alpha)=0$. Înlocuind în (4) z prin α, obținem

$$Q(\alpha)=3P(\alpha)-\alpha P'(\alpha).$$

Deoarece ambii termeni, $3P(\alpha)$ și $\alpha P'(\alpha)$ sînt nuli, $Q(\alpha)=0$, adică α satisface și ecuația (4). Reciproc, să presupunem că α ar fi o rădăcină comună ecuațiilor (2) și (4), adică

$$P'(\alpha)=0 \text{ și } 3P(\alpha)-\alpha P'(\alpha)=0.$$

Dacă ținem seama de prima dintre aceste relații, a doua se reduce la $3P(\alpha)=0$, adică $P(\alpha)=0$, deci satisface și ecuația (1).

Acum trebuie găsită condiția ca ecuațiile (2) și (4) să aibă o rădăcină comună, ceea ce este foarte ușor. Ecuația (4) are o singură rădăcină, $z=-\frac{3q}{2p}$ (am presupus că $p\neq 0$). Deci, ecuațiile (2) și (4) admit o rădăcină comună dacă și numai dacă această valoare a lui z satisface ecuația (1). Înlocuirea dă

$$4p^3+27q^2=0.$$

Aceasta este condiția căutată.

Rămîne să examinăm cazul $p=0$. În acest caz, ecuațiile și derivatele sînt:

$$P(z)=z^3+q=0,\ P'(z)=3z^2=0,\ P''(z)=6z=0,$$

$$P'''(z)=6\neq 0.$$

Ecuațiile $P'(z)=0$, $P''(z)=0$ au rădăcina $z=0$, și $P(0)=q$. Dacă $q=0$, ecuația admite rădăcina triplă $z=0$ (ceea ce se vede și

* Recurgem la acest artificiu pentru a evita calculul cu $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, care reprezintă două numere complexe.

direct, căci în acest caz ecuația este $z^3 = 0$), iar dacă $q \neq 0$, ecuația are numai rădăcini simple — în nici un caz ea nu are o rădăcină dublă.

Așadar ecuația $z^3 + pz + q = 0$ are o rădăcină dublă dacă și numai dacă

$$4p^3 + 27q^2 = 0, \qquad p \neq 0.$$

2.4.10 **Exemplu.** În cazul ecuației

$$P(z) = z^3 + 3z - 2i = 0$$

avem $p = 3$, $q = -2i$,

$$4p^3 + 27q^2 = 4 \cdot 3^3 + 27 \cdot (-2i)^2 = 108 - 108 = 0.$$

Derivata,

$$3z^2 + 3 = 0.$$

are rădăcinile $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Unul din aceste două numere este rădăcina dublă. Calculăm $P(i)$:

$$P(i) = i^3 + 3i - 2i = -i + 3i - 2i = 0.$$

Deci i este rădăcina dublă (nu mai calculăm $P(-i)$, căci ecuația fiind de gradul III, nu poate avea două rădăcini duble). Rădăcina a treia se află prin schema lui Horner:

	1	0	3	$-2i$	
	1	i	2	0	i
	1	$2i$	0		i

Ecuația rămasă este $z + 2i = 0$ și dă $z = -2i$. Rădăcinile ecuației inițiale sînt i, i, $-2i$.

Rezumat

- Valoarea unui polinom $P(z)$ pentru $z = a$ este egală cu restul împărțirii polinomului prin $z - a$.

$$P(a) = R.$$

- Un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$ dacă și numai dacă numărul a este o rădăcină a ecuației $P(z) = 0$.

$$[P(z) \text{ divizibil prin } z - a] \Leftrightarrow [P(a) = 0].$$

- Orice ecuație algebrică $P(z) = 0$ de gradul $n > 0$ are cel puțin o rădăcină în C.

$$\forall P(z),\ \exists z_1,\ z_1 \in C \text{ astfel încît } P(z_1) = 0.$$

- Orice polinom de gradul n se poate descompune în n factori liniari. Această descompunere este unică.
- O ecuație algebrică de gradul n are n rădăcini, fiecare rădăcină multiplă fiind socotită ca atîtea rădăcini cît arată ordinul ei de multiplicitate.
- Între coeficienții ecuației

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

și rădăcinile ei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ există relațiile

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

(V)

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n = \frac{a_2}{a_0}, \quad \ldots$$

Reciproc, fiind dată ecuația $P(z) = 0$, dacă numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfac relațiile (V), ele sînt rădăcinile ecuației.

- Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației algebrice $P(z) = 0$ dacă și numai dacă $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)^k$, iar cîtul $P(z) : (z - a)^k$ nu se anulează pentru $z = a$.

Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației algebrice $P(z) = 0$ dacă și numai dacă el anulează polinomul $P(z)$ și primele sale $k - 1$ derivate, și nu anulează derivata de ordinul k.

$$[a \text{ răd. mult. } k \ \ P(z) = 0] \Leftrightarrow [P(a) = 0,\ P'(a) = 0, \ldots \ldots P^{(k-1)}(a) = 0,\ P^{(k)}(a) \neq 0].$$

Exerciții

Teorema lui Bézout

1. Să se rezolve ecuațiile următoare cunoscînd cîte o rădăcină:

a) $3z^3 + 4z^2 + 5z - 6 = 0$, $z_1 = \frac{2}{3}$;

b) $z^5 - 3z^4 - 3z^3 + 9z^2 - 4z + 12 = 0$, $z_1 = 3$.

2. Să se rezolve ecuațiile următoare, cunoscînd cîte două rădăcini:

a) $2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2 = 0$; $\qquad z_1 = 2,\ z_2 = \frac{1}{2}$;

b) $z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$; $\qquad z_1 = 1,\ z_2 = -i$.

3. Să se demonstreze, pe baza teoremei lui Bézout (2.1.3), că: a) Oricare ar fi numărul natural n, $z^n - a^n$ este divizibil prin $z - a$. b) Dacă n este un număr natural impar, $z^n + a^n$ este divizibil prin $z + a$. c) Dacă n este un număr natural par, $z^n - a^n$ este divizibil prin $z + a$ şi prin $z - a$.

4. Să se demonstreze că, dacă m este divizibil prin n ($m, n, \in N$), $z^m - 1$ este divizibil prin $z^n - 1$.

5. Să se demonstreze teorema lui Bézout folosind schema lui Horner. (Se poate lua cazul unui polinom de gradul IV, $a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$.)

6. a) Să se verifice, efectuînd înmulţirea, că binomul de forma $a^n - b^n$, $n \in N$, se descompune după formula

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Să se scrie această identitate pentru cazurile $n = 3$ şi $n = 4$. Binomul $a^n - b^n$ este divizibil prin $a - b$? b) Fie un polinom oarecare

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$$

şi c o valoare oarecare a lui z. Atunci

$$P(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Să se calculeze diferenţa $P(z) - P(c)$; să se grupeze termenii în perechi, să se scoată factorii comuni a_0, a_1 etc. şi să se demonstreze astfel partea a doua a teoremei lui Bézout.

7. Să se demonstreze că restul împărţirii unui polinom $P(z)$ prin $az + b$ este $P\left(-\frac{b}{a}\right)$. Să se facă proba pe un exemplu numeric.

8. Fie $C(z)$ şi $R(z)$, respectiv, cîtul şi restul împărţirii polinomului $A(z)$ prin polinomul $B(z)$. Să se demonstreze că dacă a este o rădăcină a polinomului $B(z)$, atunci $A(a) = R(a)$.

9. Propoziţia: „$P(z)$ fiind un polinom, dacă $P(a) \neq 0$, atunci $P(z)$ nu este divizibil prin $z - a$“ este adevărată?

10. a) Există în cazul numerelor naturale o teoremă analoagă cu cea de la 2.1.6?; b) Să se demonstreze că, dacă un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$, $z - b$ şi $z - c$, el este divizibil prin $(z - a)(z - b)(z - c)$.

11. Să se demonstreze pe baza teoremei lui Bézout (partea întîi) unicitatea cîtului şi a restului pentru cazul cînd împărţitorul este de forma $z - a$.

Descompunerea polinoamelor în factori liniari, numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice

12. a) Se consideră mulţimea M formată din toate numerele întregi şi fracţiile cu numitorul 10^n, $n \in N$. Ce condiţie trebuie să satisfacă numerele întregi a şi b pentru ca ecuaţia $ax = b$ să aibă o soluţie în M?; b) Se consideră mulţimea

$Q(\sqrt{2})$ formată din toate numerele de forma $a + b\sqrt{2}$ unde $a, b \in Q$. Ce condiţie trebuie să îndeplinească numerele raţionale a, b, c pentru ca ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ să admită cel puţin o soluţie în $Q(\sqrt{2})$?

13. Să se rezolve ecuaţia $|x| + |x + 1| = 0$. Este rezultatul în contradicţie cu teorema fundamentală a algebrei?

14. Teorema fundamentală a algebrei rămîne valabilă şi în cazul ecuaţiei $P^* = 0$ unde P^* este polinomul nul?

15. Să se refacă demonstraţia teoremei cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari (2.2.4) pe cazul polinomului de gradul IV.

16. Dacă înmulţim n factori liniari, obţinem un polinom de gradul n. Reciproca acestei propoziţii este adevărată? Pe baza cărei teoreme?

17. Un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$. Sîntem siguri că în descompunerea polinomului în factori liniari apare factorul $z - a$?

18. Să se demonstreze că dacă $b^2 - 4ac < 0$, trinomul $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$ nu poate fi descompus în factori reali.

În general, dacă o ecuaţie algebrică $P(x) = 0$ are măcar o singură rădăcină imaginară, polinomul $P(x)$ nu poate fi descompus în factori liniari reali.

19. Să se rezolve ecuaţia $|x^2 - 4| = 2$. Se obţin patru soluţii. Este acest fapt în contradicţie cu teorema cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice?

20. În demonstraţia teoremei cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice intervine propoziţia: Un produs de două numere este egal cu zero numai dacă măcar unul din factori este egal cu zero? Dacă această propoziţie n-ar fi adevărată, s-ar putea ca o ecuaţie de gradul n să aibă mai mult ca n rădăcini?

21. a) De ce se pune în enunţul teoremei fundamentale a algebrei (2.2.2) condiţia $n > 0$?

b) Această menţiune mai este necesară în cazul teoremei cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice (2.2.8)?

22. Pentru cîte valori ale lui z ia un polinom de gradul n, $P(z)$, aceeaşi valoare a?

23. a) Se dau două polinoame: $P_3(z)$, de gradul III, şi $P_4(z)$, de gradul IV. Pentru cîte valori ale lui z iau aceste polinoame aceeaşi valoare? b) Aceeaşi întrebare dacă gradele celor două polinoame sînt m şi n, $m > n$. c) Aceeaşi întrebare dacă polinoamele sînt de acelaşi grad n.

24. Se dau polinoamele: $P(x)$ de gradul m, $Q(x)$ de gradul n, amîndouă cu coeficienţi reali, şi se consideră funcţiile definite de ele pentru $x \in R$. Cîte puncte comune au graficele lor?

25. Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $A(x)$ şi $B(x)$ şi produsul lor $P(x) = A(x)B(x)$. Fiecare dintre aceste polinoame defineşte o funcţie pentru $x \in R$. Fie, respectiv, S_A, S_B şi S_P mulţimea punctelor de intersecţie a graficelor acestor funcţii cu axa Ox. Ce relaţie există între aceste mulţimi?

26. Care este ordinul de multiplicitate maxim pe care îl poate avea o rădăcină a unei ecuaţii algebrice de gradul n? Să se dea exemple.

27. Să se descompună în factori liniari polinoamele

a) $2z^2 - 3z + 1$; b) $3z^2 - 2az + 5a^2$;
c) $z^2 - 3iz - 2$; d) $2z^2 - (3 + 2i)z + i + 1$;
e) $4z^4 - 5z^2 + 1$; f) $z^4 - 1$.

28. Să se demonstreze că fracțiile următoare sînt ireductibile. Se poate face demonstrația fără teorema cu privire la unicitatea descompunerii unui polinom în factori liniari?

a) $\dfrac{z^4 - (1 + i)z^2 + i}{z^2 - 4}$; b) $\dfrac{z^3 - 8}{z^2 - 4z + 3}$.

29. Să se formeze ecuațiile de grad minim care au rădăcinile următoare

a) $\frac{2}{3}$, 1 și $\frac{1}{2}$; b) 1, i și 2i;

c) $2 + 3\sqrt{5}$; $2 - 3\sqrt{5}$ și 1. d) 1, 3, $1 + i$ și $1 - i$;

e) rădăcina dublă 2 și rădăcinile simple -3 și 1;
f) rădăcina triplă 1, rădăcina dublă i și rădăcina simplă $-i$.

30. a) Să se formeze o ecuație de gradul 100, care să aibă rădăcinile $x_1 = 2$ și $x_2 = -2$. b) Să se formeze o ecuație de gradul III care să aibă rădăcinile: 1, -1; 0 și 3.

31. a) O ecuație algebrică cu coeficienți complecși $P(z) = 0$ poate avea numai rădăcini reale? Să se dea exemple. Care este condiția necesară și suficientă? b) Invers, se poate ca o ecuație algebrică cu coeficienți reali să aibă numai rădăcini complexe? Să se dea exemple.

32. Se consideră ecuațiile:

a) $(z - i)(z + 1)^3(z - 2\sqrt{3})^2 = 0$; b) $(z + 1)^3(z - 1)^3(z - 6)^3 = 0$.

Care sînt rădăcinile lor? Ce ordin de multiplicitate are fiecare dintre ele?

33. a) Să se indice un polinom $P(z)$ de gradul X care să se anuleze pentru aceleași valori ale lui z ca polinomul $Q(z) = z^2 + z - 2$. b) Se poate găsi un polinom de gradul VII care să îndeplinească aceeași condiție? Cîte astfel de polinoame există? c) Generalizare pentru cazul cînd se cere un polinom $P(z)$ de gradul p.

34. Se consideră ecuațiile $P(z) = 0$ și $Q(z) = 0$. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_m$ rădăcinile primei ecuații, care se presupun distincte, și $z_{m+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{m+n}$ rădăcinile ecuației a doua, de asemenea distincte și diferite de rădăcinile primei ecuații. a) Care sînt rădăcinile ecuației $P(z) \cdot Q(z) = 0$? b) Ce se întîmplă dacă cele două ecuații au rădăcini comune? c) Care este situația dacă un număr z_i este rădăcină multiplă de ordinul p a uneia dintre ecuațiile date și de ordinul q pentru cealaltă?

35. Să se determine p și q astfel ca ecuațiile următoare să aibă aceleași rădăcini:

a) $x^4 + (2p - q)x^3 + (p + q)x^2 + (p - q)x + 2p + q + 1 = 0$ și
$x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 8 = 0$;

b) $px^3 + (p + q + r)x^2 + (p - q - r)x + q - r = 0$ și
$3x^3 + 4x^2 - 8x + 6 = 0$.

Să se explice de ce în cazul *b*) nu se obține rezultatul așteptat.

36. Două ecuații algebrice au aceleași rădăcini și una dintre puterile lui x are în ambele ecuații același coeficient. Ce se poate spune despre ceilalți coeficienți?

37. Se poate ca două polinoame de grade diferite să se anuleze pentru aceleași valori ale necunoscutelor? Să se dea exemple. Este acest lucru în contradicție cu teorema de la 2.2.12?

38. a) Este posibil ca produsul a două polinoame să fie o constantă (un polinom constant)? Demonstrație.

b) $P(z)$ și $Q(z)$ fiind două polinoame, să se demonstreze că, dacă $P(z)$ este divizibil prin $Q(z)$ și $Q(z)$ este divizibil prin $P(z)$, cele două polinoame diferă printr-un factor constant.

c) Există ceva analog în cazul numerelor naturale?

Formulele lui Vieta

39. Să se scrie relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației de gradul V, $a_0z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + a_3z^2 + a_4z + a_5 = 0$.

40. a) Cîți termeni conține partea stîngă a fiecăreia dintre relațiile lui Vieta în cazul ecuației de gradul VI? în cazul ecuației de gradul n?

b) Cîți termeni conține partea stîngă a relației lui Vieta de rang p în cazul ecuației de gradul n?

41. Să se verifice formulele lui Vieta în cazul ecuațiilor a) $z^3 - 1 = 0$; b) $z^3 + 1 = 0$; c) $z^4 - 1 = 0$.

42. Să se formeze pe baza formulelor lui Vieta ecuațiile care au rădăcinile următoare și să se facă proba cu ajutorul schemei lui Horner:

a) -2, 1, 3 și 4; b) i, $1 + i$, 1 și -2.

Se aplică teorema lui Vieta sau reciproca? Ecuațiile se pot forma și pe baza teoremei cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari (2.2.11). Care din aceste procedee este mai practic? Care din ele este anterior și care este derivat?

43. $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ și $\operatorname{tg}\gamma$ sînt rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Să se calculeze $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$.

44. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este a, aria sa totală este s iar volumul său este v. Să se scrie ecuația de gradul III care are ca rădăcini dimensiunile paralelipipedului.

45. Să se rezolve ecuațiile următoare știind că între rădăcinile lor există relația indicată. Se va verifica că între rădăcinile aflate există acea relație.

a) $3z^3 + 7z^2 - 18z + 8 = 0$, $z_1 + z_2 = -3$;
b) $z^3 - (5 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 5\sqrt{3})z + 6\sqrt{3} = 0$, $z_1 + z_2 = 5$;
c) $5z^3 - 27z^2 + 7z + 15 = 0$, $z_1z_2 = 5$;
d) $2z^3 - 3(1 + 2i)z^2 - (4 - 9i)z + 6 = 0$, $z_1z_2 = 3i$;

e) $z^3 - 7z^2 + 4z + 12 = 0$, $z_1 = 3z_2$;
f) $z^3 - 10iz^2 - 27z + 18i = 0$, $z_1 = 2z_2$;
g) $9z^3 - 18az^2 + 11a^2z - 2a^3 = 0$, $z_1 + z_2 = z_3$;
h) $z^3 - (1 + 4i)z^2 - (5 - 3i)z + 2(1 + i) = 0$; $z_1 - z_2 = 1$;
i) $z^3 - 13az + 12a^3 = 0$, $z_1 - z_2 = 2a$;
j) $z^3 - a(a^2 + a + 1)z^2 + a^3(a^2 + a + 1)z - a^6 = 0$, $z_1 = z_2z_3$;
k) $z^3 - 10z^2 + 27z - 18 = 0$, $z_1 = 2z_2z_3$.

46. Aceeași problemă în legătură cu ecuațiile următoare:

a) $z^4 - 4z^3 - z^2 + 10z + 4 = 0$, $z_1z_2 = -1$;
b) $z^4 - (5 + i)z^3 + 5(1 + i)z^2 + (3 - 5i)z - 3i = 0$, $z_1z_2 = 3i$;
c) $z^4 + 12z - 5 = 0$, $z_1 + z_2 = 2$;
d) $2z^4 - 12az^3 + 15a^2z^2 + 9a^3z - 20a^4 = 0$, $z_1 + z_2 = 3a$;
e) $z^4 - z^2 + 12z - 36 = 0$, $z_1z_2 = -z_3z_4$;
f) $z^4 - (4 + 5i)z^3 - 4(3 - 5i)z^2 + 6(4 + 5i)z + 36 = 0$, $z_1z_2 = z_3z_4$.

47. Să se determine în ecuațiile următoare parametrul m astfel încît între rădăcini să existe relația indicată în dreptul fiecăreia și să se rezolve.

a) $4z^3 + 20z^2 + mz - 15 = 0$, $z_1 + z_2 = z_3$;
b) $z^3 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})z^2 + (5 + 3\sqrt{6})z + m = 0$, $z_1 + z_2 = z_3$;
c) $2z^3 - 3z^2 - (m + 10)z + m + 5 = 0$, $z_1 + z_2 = 1$;
d) $3z^3 - (3m + 1)z^2 + (5m - 2)z - 6 = 0$, $z_1z_2 = 1$;
e) $z^4 - 2z^3 - 6z^2 + mz - 3 = 0$, $z_1z_2 = 3$;
f) $z^4 - 8z^3 + mz^2 - 19z + 6 = 0$, $z_1 + z_2 = 5$;
g) $z^3 - 7z^2 + 7z + m = 0$, $z_1^2 + z_2^2 = 10$;
h) $z^3 - 12z^2 + mz - 60 = 0$, $z_1^2 = z_2^2 + z_3^2$.

48. Să se rezolve ecuațiile următoare și să se determine parametrul real a, știind că între rădăcinile lor există relația $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$.

a) $z^4 + az^3 + 8z + 3 = 0$;
b) $z^4 - 2(3 + i)z^3 + az^2 - 2(1 + 7i)z - 3(1 - 2i) = 0$.

49. Să se rezolve ecuația

a) $4z^4 - 8z^3 + mz^2 + 4z + n = 0$;
b) $z^4 - 2(1 + i)z^3 + 4iz^2 + mz + n = 0$.

știind că are două rădăcini duble și să se determine m și n.

50. Se consideră ecuația

$$z^3 + (m - n)z^2 + (2m - 3n)z + m + 3n = 0.$$

Să se determine m și n și să se rezolve, știind că una dintre rădăcinile ei este 2, iar suma celorlalte două rădăcini este zero.

51. Se consideră ecuația

$$z^4 - 7z^3 + mz^2 + 7z + n = 0.$$

Să se rezolve și să se determine m și n, știind că ea admite rădăcina 2 și suma a două dintre celelalte rădăcini este zero.

52. Se consideră ecuația

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Să se determine condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o îndeplinească coeficienții a, b, c și d, pentru ca între rădăcinile ei să existe relația de mai jos. Se va construi în fiecare caz cîte un exemplu numeric, adică o ecuație cu coeficienți numerici care să satisfacă condiția găsită, ecuația se va rezolva și se va verifica că între rădăcini există relația dată:

a) $z_1 + z_2 = 0$;
b) $z_1z_2 = 1$;
c) $z_1 = z_2 + z_3$;
d) $z_1 + z_3 = 2z_2$;
e) $z_2 = 2z_1$, $z_3 = 3z_1$.

53. Aceeași problemă în legătură cu ecuația

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0,$$

relația dintre rădăcini fiind

a) $z_1 + z_2 = 0$;
b) $z_1z_2 = z_3z_4$;
c) $z_1 = z_2$, $z_3 = z_4$;
d) $z_1 + z_2 = z_3z_1$, $z_3 + z_4 = z_1z_2$;
e) $z_2 = 2z_1$, $z_4 = 2z_3$.

54. Se știe că rădăcinile ecuației bipătrate

$$az^4 + bz^2 + c = 0$$

sînt opuse două cîte două. Să se demonstreze că, reciproc, dacă rădăcinile unei ecuații de gradul IV sînt opuse două cîte două, acea ecuație este bipătrată.

55. Ce relație trebuie să existe între numerele complexe a, b, c pentru ca sistemul

$$x + y + z = a, \quad xy + xz + yz = b, \quad xyz = c$$

să fie compatibil?

56. Se consideră sistemele

$$x + y + z = p, \quad xy + xz + yz = q, \quad xyz = r$$

și

$$x + y + z + u = a, \quad xy + xz + xu + yz + yu + zu = b$$
$$xyz + xyu + xzu + yzu = c, \quad xyzu = d.$$

Se dă că între soluțiile lor există legătura următoare: dacă (x_1, y_1, z_1) este o soluție a primului sistem, atunci există un număr u_1 astfel ca (x_1, y_1, z_1, u_1) să fie o soluție a sistemului al doilea. Ce relație există în acest caz între numerele p, q, r; a, b, c, d ?

57. Se consideră ecuația

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \ a \neq 0 \qquad (1)$$

și rădăcinile ei, α, β, γ, pe care le presupunem simple. Problema de a rezolva această ecuație este echivalentă cu problema de a rezolva sistemul

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}. \tag{2}$$

Or, ecuația (1) are 3 soluții, $z=\alpha$, $z=\beta$ și $z=\gamma$, pe cînd sistemul (2) are 6 soluții, căci gradele celor trei ecuații sînt, respectiv 1, 2 și 3 ($1\cdot 2\cdot 3=6$). Este aceasta o contradicție reală? Pentru orientare, se poate examina în prealabil cazul ecuației de gradul II, de exemplu $z^2-4z+3=0$. Să se trateze aceeași chestiune pentru ecuația de gradul IV.

58. Să se încerce să se rezolve ecuația de gradul II, $ax^2+bx+c=0$, rezolvînd sistemul $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Ce se constată? (v. cap. I, probl. 21).

Pentru a arăta că și încercarea analoagă în cazul ecuației de gradul III, $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$, duce la un cerc vicios, se poate proceda astfel: se scriu cele trei relații ale lui Vieta și, pentru a elimina x_2 și x_3, se înmulțește prima cu x_1^2, a doua cu $(-x_1)$, iar a treia cu 1 și se adună. Ce se constată? Dar dacă se elimină printr-un procedeu asemănător x_1 și x_3? x_1 și x_2? Să se demonstreze că și în cazul ecuației de gradul IV acest procedeu duce la un cerc vicios.

Rădăcini multiple*

59. Să se verifice că ecuațiile următoare au cîte o rădăcină dublă și să se rezolve.

a) $27z^3-36z+16=0$;
b) $z^3-9z+6\sqrt{3}=0$;
c) $z^3-3(3+4i)z+2(2+11i)=0$;
d) $z^3-6iz-4+4i=0$.

60. Să se verifice că ecuațiile următoare au cîte o rădăcină triplă și să se rezolve.

a) $3z^4-17az^3+30a^2z^2-12a^3z-8a^4=0$;
b) $z^4-2iz^3-2iz-1=0$;
c) $z^4-(7+3\sqrt{5})z^3+3(11+5\sqrt{5})z^2-(65+29\sqrt{5})z+38+17\sqrt{5}=0$.

61. Să se determine în fiecare dintre ecuațiile următoare parametrul a astfel încît ecuația să admită ca rădăcină *dublă* numărul indicat în dreptul ei și să se rezolve.

a) $z^3+az^2+bz+18=0$, $z_1=z_2=3$;
b) $4z^3-4(1-i)z^2+bz+c=0$, $z_1=z_2=\frac{1}{2}$;
c) $z^4+mz^3+17z^2-17z+n=0$, $z_1=z_2=1$.

* Problemele 59—67 se pot rezolva și prin identificare (2.4.8) sau cu ajutorul formulelor lui Vieta.

62. Să se determine în fiecare dintre ecuațiile următoare parametrul a astfel încît ecuația respectivă să aibă cîte o rădăcină *dublă* și să se rezolve. La exercițiile a) și b) se va folosi și rezultatul de la 2.4.9.

a) $4z^3-3z+a=0$; b) $z^3+3z+a=0$; c) $4z^3+8z^2-11z+a=0$.

63. Să se determine în fiecare dintre ecuațiile următoare coeficienții necunoscuți astfel încît ecuația respectivă să aibă o rădăcină *triplă* și să se rezolve.

a) $z^4-6z^3+12z^2+az+b=0$;
b) $z^4+z^3+az+b=0$;
c) $z^4-6z^2+az+b=0$.

64. Să se determine coeficienții p, q și r astfel încît ecuația

$$P(z)=z^4-5z^3+pz^2+qz+r=0$$

să aibă rădăcina triplă $z=2$ și să se rezolve.

65. Să se determine coeficienții a, b și c astfel încît ecuația

$$P(z)=4z^5+az^4-27z^3+bz^2+69z+c=0$$

să aibă rădăcinile duble $z_1=z_2=-3$ și $z_3=z_4=\frac{1}{2}$ și să se rezolve.

66. Ce condiție trebuie să satisfacă coeficienții ecuației

$$z^3+pz^2+qz+r=0$$

pentru ca ecuația să admită o rădăcină triplă? Să se afle rădăcina.

67. Să se determine p și q astfel încît ecuația $z^3+pz+q=0$ să admită rădăcina dublă $z=p$.

68. Să se refacă demonstrația teoremei de la 2.4.6 pentru cazul unei rădăcini triple.

69. Ce este greșit în enunțul următor: numărul a este o rădăcină triplă a ecuației algebrice $P(z)=0$ dacă anulează $P'(z)$ și $P''(z)$.

70. Numărul $x=0$ satisface ecuația $f(x)=\sin^2 x\cos x=0$ și derivata $f'(x)=0$. Se poate spune că $x=0$ este o rădăcină dublă a ecuației $f(x)=0$?

71. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ rădăcinile ecuației algebrice $P(z)=0$, toate rădăcinile fiind simple. Care sînt rădăcinile ecuației

$$[P(z)]^2=0,\quad [P(z)]^h=0,\ k\in N?$$

72. Să se demonstreze că dacă o ecuație de gradul IV are două rădăcini duble, $z_1=z_2=a$, $z_3=z_4=b$, derivata admite rădăcina $z=\frac{a+b}{2}$. Generalizare pentru cazul unei ecuații de gradul $2n$ care admite două rădăcini multiple de ordinul n.

73. Care este condiția ca ecuația cu coeficienți reali

$$x^3+px+q=0$$

să admită o rădăcină dublă reală. Ce relație există între semnul lui q și semnul rădăcinii duble?

74. Un polinom poate fi divizibil prin derivata sa? Să se examineze în special cazul polinomului de gradul II.

75. Să se regăsească pe baza teoremei de la 2.4.6 condiția ca ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să aibă o rădăcină dublă.

76. Se consideră o ecuație algebrică cu coeficienți reali $P(x) = 0$ și curba $y = P(x)$. Fie $x = a$ o rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației. Ce poziție are curba față de axa Ox în vecinătatea punctului de abscisă $x = a$?

77. Care dintre teoremele din acest capitol se bazează, direct sau indirect, pe teorema lui Bézout?

Ecuații cu coeficienți în Z_n*

78. 1) Să se efectueze împărțirile următoare (coeficienții aparțin claselor de resturi indicate). 2) Să se examineze dacă demonstrația de la 1.3.3. este valabilă în cazurile a) și b), în care împărțitorul este de forma $x - a$, precum și în cazurile c) și d), avînd în vedere că în Z_6 și Z_{12} există divizori ai lui zero.

a) $(\hat{2}x^3 + x^2 + \hat{3}x + \hat{1}) : (x + \hat{4}) \dots Z_5$; c) $(\hat{2}x^2 + \hat{2}x + \hat{1}) : (\hat{2}x + \hat{1}) \dots Z_6$;

b) $(x^3 + \hat{4}x^2 + \hat{3}x + 1) : (x + \hat{2}) \dots Z_6$; d) $(\hat{6}x^2 + \hat{7}x + \hat{4}) : (\hat{3}x + \hat{2}) \dots Z_{12}$.

79. Teorema lui Bézout este valabilă în cazul polinoamelor cu coeficienți din Z_n? Verificare pe primele două exemple din problema precedentă.

80. Se consideră ecuațiile următoare:

a) $\hat{2}x^2 + \hat{1} = \hat{0} \dots Z_3$;

b) $\hat{2}x^3 + x + \hat{2} = \hat{0} \dots Z_5$;

c) $x^2 + x = \hat{0} \dots Z_6$;

d) $x^2 + \hat{2}x = \hat{0} \dots Z_8$;

e) $x^2 + \hat{3}x = \hat{0} \dots Z_{10}$;

f) $x^2 + \hat{7}x + \hat{6} = \hat{0} \dots Z_{12}$.

1) Să se rezolve, încercînd toate elementele din mulțimea de definiție.

2) Teorema de la 2.2.8 se poate aplica la ecuații algebrice cu coeficienți din Z_n?

3) Faptul că numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice nu poate să întrecă gradul ecuației se demonstrează și la 1.2.3. De ce nu se adevereşte această propoziție în cazul ecuațiilor c) — f)?

4) Să se descompună fiecare dintre aceste două polinoame în factori liniari folosind teorema lui Bézout. Teorema de la 2.2.7 mai este valabilă în toate cazurile? De ce?

5) În ecuațiile c), d) și e), după ce s-a făcut descompunerea $x^2 + \hat{a}x = x(x + \hat{a})$, de ce nu se poate trage concluzia că ecuația are numai rădăcinile $x = \hat{0}$ și $x = -\hat{a}$?

* Aceste exerciții se pot face numai dacă s-a făcut în prealabil ultima grupă de exerciții (34—38) de la capitolul I.

Ecuații cu coeficienți reali, raționali, întregi

3.0. Introducere

În primele două capitole am tratat polinoame și ecuații algebrice foarte generale, cu coeficienți complecși. Deoarece $R \subset C$, $Q \subset C$, $Z \subset C$, tot ce s-a spus pînă acum rămîne adevărat și în cazul polinoamelor și ecuațiilor cu coeficienți reali, raționali, sau chiar întregi, dacă necunoscuta (variabila) ia valori complexe.

În acest capitol vom restrînge treptat mulțimea căreia îi aparțin coeficienții ecuațiilor: vom da întîi o proprietate a ecuațiilor cu coeficienți reali, apoi o proprietate a ecuațiilor cu coeficienți raționali și, în sfîrșit, ne vom ocupa de ecuațiile cu coeficienți întregi. Propozițiile pe care le vom stabili nu mai sînt adevărate în cazul ecuațiilor ai căror coeficienți aparțin unei mulțimi mai cuprinzătoare. Astfel, teorema pe care o vom demonstra pentru ecuațiile cu coeficienți reali nu mai este adevărată dacă coeficienții ecuației sînt complecși, teorema pe care o vom demonstra pentru ecuațiile cu coeficienți raționali nu mai este adevărată pentru ecuații cu coeficienți reali ș.a.m.d.

3.1. Rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali

3.1.1. **Cazul ecuației de gradul II.** Se știe că dacă ecuația de gradul II, $ax^2 + bx + c = 0$, cu coeficienți reali admite rădăcina $m + ni$, unde $m, n \in R$, ea admite și rădăcina $m - ni$; de asemenea, dacă o ecuație de gradul II cu coeficienți raționali admite rădăcina $m + n\sqrt{p}$ unde $m, n \in Q$ și $p \in N$ nu este pătrat perfect, ea admite și rădăcina $m - n\sqrt{p}$.

Exemple. a) $x^2 - 6x + 13 = 0$, $x_1 = 3 + 2i$, $x_2 = 3 - 2i$;

b) $x^2 + 8x - 29 = 0$, $x_1 = -4 + 3\sqrt{5}$, $x_2 = -4 - 3\sqrt{5}$.

Aceasta se explică elementar prin formula de rezolvare, pe care o scriem sub forma

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dacă toți coeficienții ecuației sînt reali și $b^2 - 4ac < 0$; ecuația are două rădăcini imaginare. Dar ambele rădăcini au aceeași parte reală, $-\frac{b}{2a}$, iar părțile imaginare sînt $+\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ i și $-\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ i.

În mod analog se arată că, dacă toți coeficienții ecuației sînt raționali, ambele rădăcini au aceeași parte rațională, $-\frac{b}{2a}$, iar părțile iraționale au aceeași valoare absolută, dar semne contrare.

Acest lucru este adevărat oricare ar fi gradul ecuației, dar demonstrația se face prin alte considerații, căci nu mai dispunem de o formulă de rezolvare.

Menționăm că cele arătate sînt adevărate numai dacă coeficienții ecuației sînt *reali*, respectiv *raționali*.

3.1.2. **Numere imaginar conjugate.** a) Fiind dat numărul complex

$$z = a + bi, \qquad a, b \in R$$

numărul

$$z = a - bi$$

se numește *conjugatul* lui z și se notează cu $\bar{z}$ (z supraliniat).

Exemple: $\overline{4 + 3i} = 4 - 3i$; $\overline{5 - 11i} = 5 - (-11i) = 5 + 11i$; $\bar{3} = 3$.

Conjugatul numărului $z = a + bi$ este $\bar{z} = a - bi$, să-l notăm cu u; atunci $\bar{u} = \overline{a - bi} = a - (-bi) = a + bi = z$. Aceasta înseamnă că, dacă u este conjugatul lui z, atunci z este conjugatul lui u. De aceea se poate spune că numerele $z = a + bi$ și $\bar{z} = a - bi$ sînt imaginar conjugate, în sensul că fiecare din ele este conjugatul celuilalt. Relația „este conjugat cu" este *simetrică*.

Exemplu: Conjugatul lui $3 + 7i$ este $3 - 7i$, și conjugatul lui $3 - 7i$ este $3 + 7i$; numerele $3 + 7i$ și $3 - 7i$ sînt imaginar conjugate.

b) *Conjugatul sumei.* Considerăm, de exemplu, numerele complexe

$$z = 3 + 5i \qquad \text{și} \qquad u = 2 - 7i.$$

Conjugatele lor sînt:

$$\bar{z} = 3 - 5i \qquad \text{și} \qquad \bar{u} = 2 + 7i$$

Suma numerelor considerate este

$$z + u = 5 - 2i,$$

iar suma conjugatelor lor este

$$\bar{z} + \bar{u} = 5 + 2i.$$

S-a obținut tocmai conjugatul sumei: $\bar{z} + \bar{u} = \overline{z + u}$.

Acest fapt este general. Dacă

$$z = a + bi, \qquad u = c + di,$$

atunci

$$\bar{z} = a - bi, \qquad \bar{u} = c - di.$$

Suma numerelor date este

$$z + u = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

iar suma conjugatelor lor este

$$\bar{z} + \bar{u} = (a - bi) + (c - di) = a + c - (b + d)i.$$

S-a obținut tocmai conjugatul lui $z + u$, adică $\overline{z + u}$.

Conjugatul sumei a două numere complexe este suma conjugatelor lor.

Simbolic,

$$\forall z, u, \quad z, u \in C \quad \overline{z + u} = \bar{z} + \bar{u}. \tag{A}$$

Teorema se extinde ușor asupra unei sume de mai mulți termeni.

c) *Conjugatul produsului.* Notațiile fiind cele de mai sus, să calculăm $\overline{zu}$ și $\bar{z} \cdot \bar{u}$.

$$zu = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$\bar{z} \cdot \bar{u} = (ac - bd) - (ad + bc)i;$$

se constată că produsul al doilea este conjugatul primului.

Conjugatul produsului a două numere complexe este produsul conjugatelor lor:

$$\forall z, u, \quad z, u \in C \quad \overline{zu} = \bar{z} \cdot \bar{u}. \tag{I}$$

Exemplu: Fie

$$z = 3 - 5i, \quad u = -7 + 2i; \quad \text{deci} \quad \bar{z} = 3 + 5i, \quad \bar{u} = -7 - 2i.$$

Avem:

$$zu = -11 + 41i; \qquad \bar{z} \cdot \bar{u} = -11 - 41i.$$

Rezultatele sînt conjugate.

d) *Conjugatul puterii.* Dat fiind că ridicarea la o putere cu exponent natural este o înmulțire repetată, rezultă imediat că:

Puterile naturale a două numere imaginar conjugate sînt imaginar conjugate.

$$\forall\, z,\ z \in C,\ \forall\, n,\ n \in N\ \overline{z^n} = \bar{z}^n. \qquad (P)$$

Aceste propoziții rămîn adevărate dacă unul dintre numere este real, căci, dacă $z = a = a + 0i$, conjugatul său este $\bar{z} = a - 0i = a = z$.

3.1.3. **Funcția $\bar{z}$.** Asociind fiecărui număr complex conjugatul său, am definit o funcție $f : C \to C$, care face ca fiecărui număr complex să-i corespundă conjugatul său:

$$f(a + bi) = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Exemple: $f(2 + 3i) = 2 - 3i$, $f(1 - i) = 1 + i$, $f(i) = -i$, $f(3) = 3$.

Folosind simbolul f, cele trei propoziții demonstrate mai sus se scriu:

$$f(z + u) = f(z) + f(u),$$
$$f(zu) = f(z)f(u),$$
$$f(z^n) = [f(z)]^n.$$

Se spune că *această funcție păstrează adunarea numerelor complexe, înmulțirea numerelor complexe și ridicarea unui număr complex la o putere cu exponent natural.*

3.1.4. **Valorile unui polinom pentru două valori conjugate ale variabilei.** Fie $P(z)$ un polinom cu coeficienți reali. Dacă dăm variabilei o valoare complexă, polinomul ia, în general, o valoare complexă. De exemplu, în cazul

$$P(z) = 5z^2 - 3z + 4,$$

pentru $z = 2 + 3i$ și $z = 2 - 3i$, se obține

$$P(2 + 3i) = 5(2 + 3i)^2 - 3(2 + 3i) + 4 = -27 + 21i,$$
$$P(2 - 3i) = 5(2 - 3i)^2 - 3(2 - 3i) + 4 = -27 - 21i.$$

Rezultatele sînt conjugate.

Pentru a afla valoarea unui polinom pentru o valoare dată a variabilei trebuie să facem numai ridicări la putere, înmulțiri și adunări. Teoremele de la 3.1.2. ne permit să demonstrăm că ceea ce am constatat pe acest exemplu este totdeauna adevărat.

Fie polinomul

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-k}z^k + \ldots + a_n,\ a_i \in R.$$

Dacă dăm variabilei z două valori conjugate, $z = u$ și $z = \bar{u}$, obținem

$$P(u) = a_0u^n + a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-k}u^k + \ldots + a_n$$
$$P(\bar{u}) = a_0\bar{u}^n + a_1\bar{u}^{n-1} + \ldots + a_{n-k}\bar{u}^k + \ldots + a_n.$$

Trebuie să comparăm aceste două expresii. Am pus în evidență termenul general $a_{n-k}z^k$. El dă în rîndul de sus și în cel de jos respectiv

$$a_{n-k}u^k \quad \text{și} \quad a_{n-k}\bar{u}^k.$$

Teorema cu privire la ridicarea la putere (P) ne arată că factorii u^k și $\bar{u}^k$ sînt conjugați. Fiecare din acești factori se înmulțește cu numărul real a_{n-k}. Deoarece coeficienții polinomului sînt reali, $\overline{a_{n-k}} = a_{n-k}$. Putem deci considera coeficientul a_{n-k} din produsul al doilea ca fiind conjugatul lui a_{n-k} din primul produs. Teorema cu privire la înmulțire (I) arată că $a_{n-k}\bar{u}^k$ este conjugatul lui $a_{n-k}u^k$. Termenul considerat fiind oarecare, rezultă că fiecare termen din rîndul al doilea care conține u este conjugat cu termenul scris deasupra lui. Și acest lucru este valabil pentru toți termenii care conțin z. Cît despre a_n, el este conjugat cu el însuși. N-a rămas decît să adunăm în fiecare rînd termenii. Fiecărui termen din rîndul de sus îi corespunde în rîndul de jos un termen conjugat cu el. Teorema cu privire la adunare (A) ne arată că sumele vor fi conjugate. Dacă în rîndul întîi se obține rezultatul $m + ni$, în rîndul al doilea se obține $\overline{m + ni} = m - ni$.

Valorile unui polinom cu coeficienți reali pentru două valori imaginar conjugate ale variabilei sînt imaginar conjugate.

Simbolic,

$$[P(u + vi) = m + ni] \Rightarrow [P(u - vi) = m - ni]$$

sau, mai scurt:

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}.$$

3.1.5. **Rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali.** Cu această pregătire putem demonstra teorema anunțată la începutul acestui paragraf.

Fie

$$P(z) = 0$$

o ecuație algebrică cu coeficienți reali și $a + bi$ o rădăcină a ei,

$$P(a + bi) = 0.$$

Atunci $P(a - bi)$ va fi conjugatul lui zero, care este tot zero, deci

$$P(a - bi) = 0,$$

ceea ce înseamnă că $a - bi$ este de asemenea o rădăcină a ecuației $P(z) = 0$.

Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți reali admite rădăcina $u + vi$, ea admite rădăcina $u - vi$.

$$[P(u + vi) = 0] \Rightarrow [P(u - vi) = 0].$$

Cu alte cuvinte, *rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali sînt conjugate două cîte două.*

3.1.6. **Rezumat.** Am introdus funcția $\bar{z}$ pentru a putea demonstra această teoremă. Demonstrația se poate rezuma în schema următoare:

$$[\bar{z}^k = \overline{z^k}] \Rightarrow [a_{n-k}\bar{z}^k = \overline{a_{n-k}z^k}] \Rightarrow$$
$$\text{(P)} \quad \text{(I)} \qquad\qquad \text{(A)}$$

$$\Rightarrow [P(\bar{z}) = \overline{P(z)}] \Rightarrow [P(z) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0].^{*)}$$
$$\overline{(0)}$$

Semnele de sub simboli arată pe ce se bazează fiecare relație, și anume (P), (I) și (A) înseamnă, respectiv, că trecerea la numărul conjugat păstrează ridicarea unui număr complex la o putere naturală, înmulțirea și adunarea numerelor complexe, iar $\overline{(0)}$ — faptul că conjugatul lui 0 este 0.

Aplicații.

3.1.7. **Ecuații cu coeficienți numerici.** *Să se rezolve ecuația*

$$P(z) = z^4 - 7z^3 + 24z^2 - 41z + 35 = 0$$

știind că admite rădăcina $2 + i\sqrt{3}$.

Ecuația dată avînd coeficienți reali, admite și rădăcina $2 - i\sqrt{3}$ deci polinomul dat $P(z)$ este divizibil prin produsul $(z - 2 - i\sqrt{3})(z - 2 + i\sqrt{3})$, care este egal cu $z^2 - 4z + 7$. Împărțind polinomul $P(z)$ prin acest trinom, se obține cîtul $z^2 - 3z + 5$, cu rădăcinile $\frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$. Deci, rădăcinile ecuației sînt: $2 \pm i\sqrt{3}$ și $\frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$.

3.1.8. **Observări.** 1) Problema se mai poate rezolva identificînd polinomul $P(z)$ cu polinomul care se obține efectuînd $(z^2 - 4z + 7)(z^2 + pz + q)$; se obține un sistem de ecuații compatibil, care dă $p = -3$, $q = 5$.

2) Se poate proceda și astfel: Polinomul dat se împarte prin $z - (2 + i\sqrt{3})$, iar cîtul prin $z - (2 - i\sqrt{3})$.

*) În această schemă, ca și în cea de la 2.3.3, săgeata ($\Rightarrow$) trebuie considerată ca semn de *relație*, nu ca în logică matematică; numai astfel lanțul de săgeți are sens.

3.1.9. **Cazul cînd ecuația conține parametri.** De fapt nu trebuie să cunoaștem toți coeficienții ecuației $P(z) = 0$. De exemplu, cînd se folosește metoda identificării, indicată mai sus, se obține sistemul

$$p - 4 = -7, \quad -4p + q = 17, \quad 7p - 4q = -41, \quad 7q = 35.$$

Pentru a afla p și q, ajung două oarecare dintre aceste ecuații (faptul că valorile aflate pentru p și q satisfac și celelalte două confirmă că ecuația propusă are rădăcina dată), iar cu ajutorul celorlalte două ecuații se pot determina doi parametri care ar figura eventual în ecuație. De aceea se pot rezolva pe aceeași cale problemele de tipul următor:

Se dă ecuația:

$$z^4 + az^4 + 24z^2 + bz + 35 = 0, \quad \text{sau} \quad z^4 - 7z^3 + az^2 + bz + 35 = 0$$

ș.a.m.d. Să se determine coeficienții reali a și b astfel încît ecuația să admită rădăcina $2 + i\sqrt{3}$ *și să se rezolve ecuația.*

În cazul primului exemplu, se obține sistemul

$$p - 4 = a, \quad -4p + q = 17, \quad 7p - 4q = b, \quad 7q = 35.$$

Ecuația a doua și a patra dau p și q, iar prima și a doua dau coeficienții a și b.

3.2. Rădăcinile iraționale pătratice ale unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali

3.2.1. **Iraționale pătratice.** Numere reale ca

$$3 + \sqrt{5}, \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{13}, \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{8}\sqrt{11} \text{ etc.}$$

se numesc *iraționale pătratice.*

Un număr irațional pătratic (mai scurt, un irațional pătratic) *este un număr real de forma*

$$m + n\sqrt{p},$$

unde $m \in Q$, $n \in Q \setminus \{0\}$, $p \in N$ *și* p *nu conține nici un factor care să fie pătrat perfect.*

În exemplele de mai sus m, n și p sînt respectiv:

$$m = 3,\ n = 1,\ p = 5; \quad m = \frac{2}{3},\ n = -\frac{1}{7},\ p = 13;$$

$$m = \frac{2}{5},\ n = \frac{3}{8},\ p = 11.$$

Mulțimea tuturor iraționalelor pătratice care conțin sub radical același număr p fac parte dintr-un *corp pătratic*, care se notează cu $Q(\sqrt{p})$. $Q(\sqrt{p}) = \{m + n\sqrt{p} \mid m, n \in Q, p \in N$ și p nu conține nici un factor care să fie pătrat perfect$\}$.

De exemplu, toate numerele de forma $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in Q$, cum ar fi:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\sqrt{2},\ \frac{3}{8} + \sqrt{2},\ \frac{1\,969}{2\,000} - \frac{3}{940}\sqrt{2},\ \ldots$$

formează corpul pătratic $Q(\sqrt{2})$; numerele

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{29},\ 1 - 4\sqrt{29},\ 3 + 17\sqrt{29},\ \ldots$$

formează corpul pătratic $Q(\sqrt{29})$.

Vom considera și cazul în care sub radical apare un număr rațional oarecare, dar le vom transforma astfel încît sub radical să rămînă un număr natural care să nu conțină nici un pătrat perfect ca factor.

Exemple: $2 + \sqrt{45} = 2 + 3\sqrt{5},\ 3 + 4\sqrt{\frac{5}{6}} = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{30}.$

3.2.2. **Rădăcinile iraționale pătratice ale unei ecuații algebrice cu coeficienți rationali.** Fiind dat iraționalul pătratic $x = m + n\sqrt{p}$, numărul $\bar{x} = m - n\sqrt{p}$ se numește conjugatul lui x. Această relație este simetrică: fiecare dintre numerele $x = m + n\sqrt{p}$ și $\bar{x} = m - n\sqrt{p}$ este conjugatul celuilalt.

Exemple: $x = \frac{1}{2} + 3\sqrt{3},\ \bar{x} = \frac{1}{2} - 3\sqrt{3};$

$$x = 2 - \sqrt{7},\ \bar{x} = 2 + \sqrt{7}.$$

Toate cele arătate la 3.1.2. — 3.1.6. despre numerele imaginar conjugate se pot repeta pentru iraționalele pătratice. Se ajunge astfel la teorema:

> Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți rationali $P(x) = 0$ admite ca rădăcină un irațional pătratic $m + n\sqrt{p}$, ea admite și conjugatul său, $m - n\sqrt{p}$, ca rădăcină.

$$[P(m + n\sqrt{p}) = 0] \Rightarrow [P(m - n\sqrt{p}) = 0].$$

Cu alte cuvinte *rădăcinile de forma $m + n\sqrt{p}$ ale unei ecuații cu coeficienți rationali sînt conjugate două cîte două.*

3.2.3. **Aplicație.** Să se rezolve ecuația

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 7x + 52 = 0$$

știind că admite rădăcina $4 + \sqrt{3}$.

Ecuația admite și rădăcina $4 - \sqrt{3}$. Trinomul cu rădăcinile $4 + \sqrt{3}$ și $4 - \sqrt{3}$ este $x^2 - 8x + 13$. Împărțim $P(x)$ prin acest trinom și obținem cîtul $x^2 + 3x + 4$ cu rădăcinile $\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Rădăcinile ecuației sînt: $4 \pm \sqrt{3}$ și $\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

3.2.4. **Observare.** Se poate demonstra că dacă o ecuație algebrică cu coeficienți rationali admite o rădăcină de forma $m + n\sqrt{p} + q\sqrt{r}$, unde $m, n, q \in Q$ $p, r \in N$ și nici p, nici r nu conțin ca factori nici un pătrat perfect, ea admite și rădăcinile $m - n\sqrt{p} + q\sqrt{r}$, $m + n\sqrt{p} - q\sqrt{r}$, $m - n\sqrt{p} - q\sqrt{r}$, care se obțin schimbînd semnele în toate modurile posibile. Analog, în cazul unei rădăcini de forma $m + n\sqrt{p} + q\sqrt{r} + s\sqrt{t}$ ș.a.m.d.

3.3. Rădăcinile iraționale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi

3.3.1. **Limitele rădăcinilor.** Dacă o ecuație algebrică are coeficienți întregi, rădăcinile ei raționale, dacă există, se pot găsi prin încercări. Pentru ca numărul acestor încercări să fie cît mai mic, este util să găsim în prealabil un interval, cît mai mic, în care se găsesc toate rădăcinile reale ale ecuației.

Fie $P(x) = 0$ o ecuație algebrică cu coeficienți reali. Dacă ea nu are nici o rădăcină reală mai mare decît un număr L, se spune că L este o *limită superioară a rădăcinilor ecuației*; dacă ecuația nu admite nici o rădăcină mai mică decît numărul L', se spune că L' este *o limită inferioară a rădăcinilor ecuației.*

Dacă am găsit limitele L' și L știm că rădăcinile reale ale ecuației, dacă există, se află în intervalul (L', L); ecuația nu are nici o rădăcină în afara acestui interval (fig. 1).

Numerele L și L' nu sînt unic determinate. De exemplu, dacă printr-o metodă găsim $L' = -15$, $L = 24$, înseamnă că rădăcinile reale ale ecuației se găsesc în intervalul $(-15, 24)$; dacă printr-o altă metodă găsim $L' = -10$, $L = 18$, înseamnă că rădăcinile se găsesc în intervalul $(-10, 18)$. Aceste rezultate nu sînt contradictorii, dar al doilea este mai util.

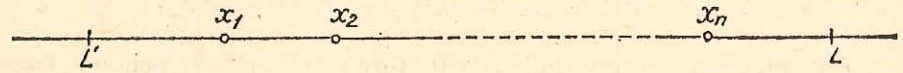

Fig. 1

3.3.2. **Propoziție ajutătoare.** Fie, de exemplu, ecuația

$$P(x) = 4x^6 + x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 6x - 7 = 0,$$

care prezintă particularitatea următoare: semnele coeficienților polinomului $P(x)$ sînt: $+++++---$; primii coeficienți sînt pozitivi, iar îndată ce apare un coeficient negativ, toți coeficienții următori sînt negativi. Se spune că polinomul are *o singură variație*. Polinoamele în care coeficienții au semnele $++++----$, sau $+-----$ etc. au de asemenea o singură variație.

Punem polinomul $P(x)$ sub forma

$$P(x) = x^3\left[4x^3 + x^2 + 2x + 5 - \left(\frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)\right].$$

(Am scos în fața parantezei cea mai mică putere a lui x care are un coeficient pozitiv.)

Expresia dintre paranteze este de forma

$$E(x) = f(x) - g(x)$$

unde

$$f(x) = 4x^3 + x^2 + 2x + 5,\ g(x) = \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}.$$

Considerăm funcțiile f, g și E definite de aceste relații pentru $x \in (0, \infty)$. Funcția f este crescătoare, iar funcția g este descrescătoare pe acest interval. În adevăr, derivata

$$f'(x) = 12x^2 + 2x + 2$$

este pozitivă pentru orice x din intervalul $(0, \infty)$, iar

$$g'(x) = -\frac{8}{x^2} - \frac{12}{x^3} - \frac{21}{x^4}$$

este negativă pentru orice x din acest interval. Rezultă că funcția E este crescătoare în intervalul $(0, \infty)$, căci dacă descăzutul $f(x)$ crește și scăzătorul $g(x)$ descrește, diferența $E(x)$ crește.

Fie acum a un număr pozitiv pentru care valoarea expresiei $E(x)$ este pozitivă: $a > 0$, $E(a) > 0$. Deoarece funcția E este crescătoare în intervalul $(0, \infty)$, $E(x)$ va fi pozitiv pentru orice valoare a lui x mai mare decît a. Revenim la polinomul $P(x)$,

$$P(x) = x^3E(x).$$

Dat fiind că $x^3 > 0$ cînd $x > 0$, rezultă $P(x) > 0$ pentru orice $x > a$.

Acest raționament se poate face în cazul oricărui polinom cu coeficienți reali care are o singură variație. Rezultă că:

Dacă un polinom $P(x)$ cu coeficienți reali care are o singură variație este pozitiv pentru o valoare pozitivă a lui x, $x = a$, el rămîne pozitiv pentru orice valoare a lui x mai mare decît a.

$$[a > 0,\ P(a) > 0] \Rightarrow [x > a \Rightarrow P(x) > 0].$$

3.3.3. **Metoda grupării termenilor.** Numărul a din această propoziție este o limită superioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$, $a = L$, căci pentru orice $x > a$, $P(x) > 0$, deci $P(x) \neq 0$.

Deci, dacă polinomul $P(x)$ cu coeficienți reali are o singură variație, orice număr care face polinomul $P(x)$ pozitiv este o limită superioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$.

Dacă polinomul $P(x)$ are mai multe variații, se procedează prin *gruparea termenilor*, ca în exemplul următor.

Fie ecuația

$$P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 31x - 96 = 0.$$

Grupăm termenii astfel încît:

a) coeficientul primului termen din fiecare grupă să fie pozitiv;

b) fiecare grupă să aibă o singură variație sau nici una.

Deci scriem:

$$P(x) = (x^6 - 3x^5) + (2x^4 - 31x) + (3x^2 - 96)$$

sau

$$P(x) = \underbrace{x^5(x-3)}_{4} + \underbrace{x(2x^3 - 31)}_{3} + \underbrace{(3x^2 - 96)}_{6}.$$

Căutăm cel mai mic număr întreg, pentru care fiecare grupă este pozitivă. Găsim pentru prima grupă 4, pentru a doua 3 și pentru a treia 6. Conform propoziției auxiliare (3.3.2), prima grupă este pozitivă pentru $x > 4$, a doua pentru $x > 3$, iar a treia pentru $x > 6$. Pentru $x > 6$, toate grupele vor fi pozitive, deci polinomul va fi pozitiv, deci $L = 6$ este o limită superioară a rădăcinilor ecuației propuse.

Gruparea se poate face și astfel:

$$P(x) = \underbrace{x(x-3)}_{4} + \underbrace{(2x^4 - 96)}_{3} + \underbrace{x(3x - 31)}_{11}.$$

Am obținut $L = 11 > 6$. Prima grupare dă un rezultat mai bun.

3.3.4. **Transformata în $(-x)$.** Considerăm, de exemplu, o ecuație de gradul IV:

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \qquad (1)$$

Introducem o altă necunoscută $y = -x$. Ecuația devine

$$P(-x) = Q(y) = a_0y^4 - a_1y^2 + a_2y^2 - a_3y + a_4 = 0. \quad (2)$$

Ce legătură există între rădăcinile acestor ecuații?
Fie r o rădăcină a ecuației (1), deci

$$P(r) = a_0r^4 + a_1r^3 + a_2r^2 + a_3r + a_4 = 0.$$

Dacă înlocuim în ecuația a doua y prin $-r$, obținem

$$Q(-r) = a_0r^4 + a_1r^3 + a_2r^2 + a_3r + a_4.$$

Relația precedentă arată că această expresie este egală cu zero, deci $-r$ este rădăcină a ecuației (2). Așadar, dacă r este o rădăcină a ecuației (1), atunci $-r$ este o rădăcină a ecuației (2).

Dacă în (2) notăm necunoscuta cu x, ea se scrie:

$$P(-x) = a_0x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = 0$$

și se numește *transformata în* $(-x)$ *a ecuației* (1).

Din cele arătate rezultă că, în general:

Dacă o ecuație algebrică $P(x) = 0$ *are rădăcinile* $x_1, x_2, ..., x_n$, *transformata ei în* $(-x)$, $P(-x) = 0$ *are rădăcinile* $-x_1, -x_2, ..., -x_n$.

Transformata în $(-x)$ a transformatei în $(-x)$ a unei ecuații $P(x) = 0$ este chiar ecuația $P(x) = 0$. Rezultă că, dacă transformata în $(-x)$ a unei ecuații $P(x) = 0$, adică ecuația $P(-x) = 0$ are rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$, ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile $-x_1, -x_2, ..., -x_n$.

3.3.5. **Limita inferioară a rădăcinilor.** Această limită se află cu ajutorul transformatei în $(-x)$.

Considerăm ecuația $P(x) = 0$ și transformata ei în $(-x)$, $P(-x) = 0$. Fie L o limită superioară a rădăcinilor ecuației $P(-x) = 0$. Aceasta înseamnă că, dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sînt rădăcinile acestei ecuații, au loc relațiile

$$x_1 < L, \; x_2 < L, \; ..., \; x_n < L.$$

Conform propoziției de la 3.3.4, ecuația inițială $P(x) = 0$ va avea rădăcinile $-x_1, -x_2, ..., -x_n$ și vor avea loc relațiile

$$-x_1 > -L, \; -x_2 > -L, \; ..., \; -x_n > -L,$$

ceea ce înseamnă că toate rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt mai mari decît $-L$; numărul $L' = -L$ este o limită inferioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$.

Rezultă că, pentru a afla limita inferioară a rădăcinilor unei ecuații $P(x) = 0$, se poate proceda astfel: se formează transformata în $(-x)$ și se caută o limită superioară a rădăcinilor ei, L. Numărul $L' = -L$ va fi o limită inferioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$.

3.3.6. **Exemplu.** În cazul ecuației (3.3.3)

$$P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 31x - 96 = 0.$$

transformata în $(-x)$ este

$$P(-x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 21x - 96 = 0$$

Grupăm termenii astfel:

$$\underbrace{(x^6 - 96)}_{3} + \underbrace{(3x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 31x)}_{1}.$$

Am obținut $L = 3$, deci $L' = -3$ este o limită inferioară a rădăcinilor ecuației propuse.

Am aflat mai înainte (3.3.3) că pentru ecuația dată $L = 6$ și am aflat acum că $L' = -3$. Rezultă că ecuația nu poate avea rădăcini reale decît în intervalul $(-3,6)$.

3.3.7. **Aflarea rădăcinilor întregi.** Fie

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

o ecuație algebrică cu coeficienți întregi, $a_i \in Z$, și fie $x = p$ o rădăcină întreagă a ei, $p \in Z$. Atunci

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n = 0,$$

de unde

$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + ... + a_{n-1}) = -a_n$$

sau

$$a_0p^{n-1} + a_0p^{n-2} + ... + a_{n-1} = -\frac{a_n}{p}.$$

Expresia din partea stîngă a acestei relații este un număr întreg, căci toate literele pe care le conține reprezintă numere întregi. Rezultă că și în partea dreaptă trebuie să figureze un număr întreg, deci a_n este divizibil prin p.

> Dacă o ecuație algebrică $P(x) = a_0x^n + ... + a_n = 0$ cu coeficienți întregi admite ca rădăcină numărul întreg p, atunci a_n este divizibil prin p.

$$[p \in Z, \; P(p) = 0] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p].$$

De aici rezultă că, pentru a afla rădăcinile întregi ale unei ecuații cu coeficienți întregi se poate proceda astfel: se face o listă a tuturor divizorilor termenului liber din intervalul (L', L) și, prin încercări, se stabilește care dintre ei satisfac ecuația. Ecuația nu are alte rădăcini întregi decît cele găsite pe această cale.

3.3.8. **Exemplu.** Reluăm ecuația

$$x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 31x - 96 = 0.$$

Am stabilit că rădăcinile ei se pot găsi numai în intervalul $(-3, 6)$. Divizorii lui 96 care se găsesc în acest interval sînt $-2, -1, 1, 2, 3$ și 4.
Numai aceste numere întregi vin în considerație. Le încercăm pe rînd, folosind schema lui Horner:

1	−3	2	0	3	−31	−96	
1	−5	12	−24	51	−133	*	−2
1	−4	6	− 6	9	− 40	*	−1
1	−2	0	0	3	− 28	*	1
1	−1	0	0	3	− 25	*	2
1	0	2	6	21	32	0	3

Polinomul se împarte prin $x + 2$ și se constată că împărțirea nu se face exact — în locul restului se pune o steluță. Apoi se împarte prin $x + 1$, $x - 1$ și $x - 2$, și se constată că nici -1, nici 1, nici 2 nu sînt rădăcini. Împărțirea prin $x - 3$ se face exact. Ar trebui să împărțim cîtul $(x^5 + 2x^3 + 6x^2 + 21x + 32)$ din nou prin $x - 3$, pentru a vedea dacă x nu este rădăcină dublă, apoi prin $x - 4$, dar în cazul de față aceste încercări nu sînt necesare, deoarece toți coeficienții cîtului sînt pozitivi, deci el nu poate avea o rădăcină pozitivă.

3.3.9. **Aflarea rădăcinilor fracționare.** Admitem ca adevărate următoarele propoziții:

1) *Fie a și b două numere întregi. Dacă a este prim cu b, atunci și $a^n (n \in N)$ este prim cu b.*

De exemplu, 14 este prim cu 15, căci $14 = 2 \cdot 7, 15 = 3 \cdot 5$ (aceste numere nu au nici un divizor comun); $14^2 = 2^2 \cdot 7^2$; $14^3 = 2^3 \cdot 7^3$... sînt de asemenea prime cu 15.

2) *Fie a, b, c trei numere întregi. Dacă produsul ab este divizibil prin c și a este prim cu c, atunci b este divizibil prin c.*

De exemplu, $35 \cdot 12$, adică 420 este divizibil prin 6; 35 este prim cu 6, dar 12 este divizibil cu 6.

Condiția ca a să fie prim cu c este esențială. De exemplu $42 \cdot 18$, adică 756 este divizibil prin 12, dar nici 42, nici 18 nu este divizibil prin 12; deoarece unul din factori, în cazul de față 42, nu este prim cu 12, nu sîntem în drept să conchidem că celălalt factor este divizibil prin 12.

Fie acum

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

o ecuație algebrică cu *coeficienți întregi*. Să presupunem că fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$ este o rădăcină a ei:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0.$$

Scăpăm de numitori:

$$(\alpha) \qquad a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

a) Această relație se poate pune sub forma

$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}) = -a_nq^n$$

sau

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1} = -\frac{a_nq^n}{p}.$$

Expresia din partea stîngă reprezintă un număr întreg, deci și expresia din dreapta trebuie să reprezinte un număr întreg, ceea ce se întîmplă numai dacă a_nq^n este divizibil prin p. Or, a_nq^n este un produs de doi factori; fracția $\frac{q}{p}$ fiind ireductibilă, q este prim cu p; pe baza primei propoziții, deducem că și q^n este prim cu p. Deci unul dintre factorii produsului a_nq^n este prim cu p; pe baza propoziției a doua deducem că celălalt factor, a_n, este divizibil prin p.

b) Reluăm relația (α). Printr-un procedeu simetric cu cel de mai sus, o punem sub forma

$$a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = -\frac{a_0p^n}{q}$$

și, prin același raționament ca cel de mai sus, ajungem la concluzia că a_0 este divizibil prin q. Așadar:

> Dacă o ecuație algebrică $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ cu coeficienți întregi admite ca rădăcină fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$, atunci a_n este divizibil prin p și a_0 este divizibil prin q.

$$\left[\frac{p}{q} \in Q,\ P\left(\frac{p}{q}\right) = 0\right] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p,\ a_0 \text{ divizibil prin } q].$$

Pentru a ține minte care dintre termenii fracției $\frac{p}{q}$ este un divizor al lui a_0 și care al lui a_n, este bine să observăm că, dacă $q = 1$, rădăcina este numărul întreg p — care trebuie să fie un divizor al lui a_n. Sau, cu ajutorul schiței

$$a_0x^n + \ldots + a_n.$$
$$\swarrow \quad \frac{p}{q} \quad \searrow$$

De aici rezultă procedeul următor pentru a afla rădăcinile fracționare ale unei ecuații cu coeficienți întregi: se formează toate fracțiile ireduc-

tibile care au ca numărător un divizor al termenului liber și ca numitor un divizor al primului coeficient, apoi se stabilește prin încercări care dintre ele satisfac ecuația.

3.3.10. **Exemplu.** Să se afle rădăcinile fracționare ale ecuației.

$$4x^4 + 8x^3 - 11x^2 - 13x - 3 = 0.$$

Divizorii pozitivi ai lui 3 sînt 1, 3, divizorii pozitivi ai lui 4 sînt 1, 2, 4. Îi așezăm într-un tabel (lăsînd la o parte pe 1 de la divizorii lui 4)

1	3
2	4

Acum formăm toate fracțiile care au numărătorul 1 și numitorul 2 sau 4, apoi cele care au numărătorul 3 și numitorul 2 sau 4 — lăsînd la o parte fracțiile reductibile. Obținem

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4},$$

la care se adaugă

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}.$$

Acestea sînt singurele fracții care vin în considerare. Le încercăm:

4	+8	−11	−13	−3	
4	10	− 6	−16	*	$\frac{1}{2}$
4	9	*			$\frac{1}{4}$
4	14	10	2	0	$\frac{3}{2}$
4	20	40	*		$\frac{3}{2}$
4	12	4	0		$-\frac{1}{2}$

Primele două rînduri arată că $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$ nu sînt rădăcini. Dacă la cît apare un coeficient fracționar, lucrarea nu mai trebuie continuată — este sigur că numărul respectiv nu este rădăcină (v. problema 38). Rîndul al treilea arată că $\frac{3}{2}$ este rădăcină. Cîtul obținut l-am împărțit din nou prin $x - \frac{3}{2}$, pentru a vedea

dacă $\frac{3}{2}$ nu este rădăcină multiplă — am constatat că nu. Deoarece toți coeficienții cîtului din rîndul al treilea sînt pozitivi, el nu admite nici o rădăcină pozitivă, de aceea n-am mai încercat fracția $\frac{3}{4}$. Împărțirea următoare arată că $-\frac{1}{2}$ este rădăcină și a rămas de rezolvat ecuația $4x^2 + 12x + 4 = 0$, adică $x^2 + 3x + 1 = 0$. Rădăcinile ecuației sînt:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

3.3.11. **Excluderea unor fracții.** Dacă numărul fracțiilor care trebuie încercate este mare, unele dintre ele pot fi eliminate pe baza observației următoare.

Presupunem că ecuația cu coeficienți întregi $P(x) = 0$ admite ca rădăcină fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$. Atunci polinomul $P(x)$ este divizibil prin $x - \frac{a}{b}$, sau prin $bx - a$, și are loc identitatea

$$\forall\, x,\ x \in R\ \ P(x) = (bx - a)C(x),$$

unde $C(x)$ este un polinom cu coeficienți întregi (v. problema 38).

Înlocuim în această identitate x prin 1; obținem

$$P(1) = (b - a)C(1).$$

Deoarece $P(1)$ și $C(1)$ sînt numere întregi, această relație arată că $P(1)$ este divizibil prin $b - a$. Rezultă că, dacă $P(1)$ nu este divizibil prin $b - a$, fracția $\frac{a}{b}$ nu este rădăcină. Înlocuind în identitatea de mai sus x prin -1, se arată în mod analog că, dacă $P(-1)$ nu este divizibil prin $a + b$, fracția $\frac{a}{b}$ nu este rădăcină.

În cazul ecuației de mai sus (3.3.10), $P(1) = -15$, $P(-1) = -5$. Lucrările se pot așeza astfel:

$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	
$b - a$	1	3	−1	1	3	5	5	7	$P(1) = -15$
$a + b$	3	5	5	7	1	3	−1	1	$P(-1) = -5$

$P(1) = -15$ este divizibil prin toate numerele din rîndul al doilea afară de 7, ceea ce duce la eliminarea fracției $-\frac{3}{4}$; $P(-1) = -5$ este divizibil prin toate numerele din rîndul al treilea afară de 3 și 7, ceea ce duce la eliminarea fracțiilor $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{4}$. În felul acesta am eliminat trei fracții — au rămas de încercat celelalte.

3.3.12. **Regulă.** Pentru a afla rădăcinile raționale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi, se fac lucrările următoare:

1. Se determină limitele rădăcinilor L și L'.
2. Se caută rădăcinile întregi.
3. Se caută rădăcinile fracționare.

În principiu, s-ar putea căuta întîi rădăcinile fracționare, dar este mai practic să se caute întîi rădăcinile întregi, care cer calcule mai ușoare. Dacă ecuația admite una sau mai multe rădăcini întregi, rămîn de căutat rădăcinile fracționare ale unei ecuații de grad mai mic, unde calculele sînt mai simple.

3.4. Descompunerea polinoamelor cu coeficienți reali

3.4.1. **În ce constă problema.** Se știe că orice polinom de gradul n se poate descompune în n factori liniari — dacă se admite ca termenii liberi ai factorilor să fie numere complexe. Această descompunere nu mai este totdeauna posibilă în cazul unui polinom cu coeficienți reali dacă se cere ca termenii liberi ai factorilor să fie reali. De exemplu, ecuația $x^2 - 4x + 5 = 0$ are rădăcinile $2 \pm i$, deci

$$x^2 - 4x + 5 = [x - (2 - i)][x - (2 + i)].$$

Descompunerea în factori liniari fiind unică (2.2.7.), sîntem siguri că nu există factori liniari reali al căror produs să fie tot $x^2 - 4x + 5$. Urmează să vedem cum se poate descompune un polinom cu coeficienți reali în factori cu coeficienți reali.

3.4.2. **Polinoame ireductibile**

Un polinom $P(x)$ cu coeficienți reali se numește reductibil într-o mulțime numerică dată (Z, Q, R sau C) dacă există două polinoame, $A(x)$ și $B(x)$ cu coeficienți din acea mulțime astfel încît să aibă loc identitatea

$$P(x) = A(x)B(x).$$

Un polinom care nu este reductibil într-o mulțime numerică dată se numește *ireductibil* în acea mulțime.

Subliniem că o afirmație ca: polinomul $P(x)$ este reductibil (sau ireductibil) nu are nici un sens dacă nu se precizează cărei mulțimi îi aparțin coeficienții factorilor. Astfel, polinomul $x^2 - 4x + 5$ de mai sus este reductibil în C, dar nu este reductibil în R. Tot așa

$$P(x) = x^2 - 4x + 1 = [x - (2 - \sqrt{3})][x - (2 + \sqrt{3})]$$

este reductibil în R, dar nu este reductibil în Q, și cu atît mai puțin în Z.

3.4.3. **Descompunerea polinoamelor cu coeficienți reali**

Orice polinom cu coeficienți reali se poate descompune în factori ireductibili de gradul I și II cu coeficienți reali.

În adevăr, fie $P(x) = 0$ o ecuație algebrică cu coeficienți reali. Fiecărei rădăcini reale r, îi corespunde un factor real $(x - r)$. Dacă ecuația are o rădăcină imaginară $a + bi$, ea are și rădăcina $a - bi$ și în descompunerea polinomului în factori liniari apar factorii $x - (a + bi)$ și $x - (a - bi)$. Dacă grupăm acești factori la un loc și efectuăm înmulțirea, obținem:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) + bi][(x - a) - bi] =$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2,$$

adică un factor de forma $x^2 + px + q$, unde $p, q \in R$.

Dacă ecuația are o rădăcină imaginară multiplă $a + bi$ de ordinul k, în descompunerea lui $P(x)$ apar factorii

$$[x - (a + bi)]^k \text{ și } [x - (a - bi)]^k,$$

produsul lor este $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^k$, adică de formă $(x^2 + px + q)^k$.

3.4.4. **Exemple.** 1) Ecuația

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 5x + 6 = 0$$

are rădăcinile simple 2 și 3, și rădăcinile duble i și $-i$. Descompunerea polinomului $P(x)$ în factori reali ireductibili este

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)^2.$$

2) Ecuația

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x - 14 = 0$$

are rădăcinile 1, $2 \pm i\sqrt{3}$, $-1 \pm i$. Descompunerea polinomului $P(x)$ în factori reali ireductibili este

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 7)(x^2 + 2x + 2).$$

3.4.5. **Studiul semnului unui polinom.** Se știe din algebra elementară cum se studiază semnul unui produs sau al unui cît de polinoame, folosind descompunerea polinoamelor în factori liniari și teoremele despre semnul trinomului. Acum cînd știm să rezolvăm unele ecuații de grad superior, putem folosi aceeași metodă pentru a studia semnul unui polinom de grad mai mare.

Fie, de exemplu, de studiat semnul polinomului

$$P(x) = 2x^6 - 29x^5 + 136x^4 - 230x^3 + 98x^2 - 61x + 84.$$

Ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile 1, 3, 4, 7 și $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$. Descompunerea polinomului în factori reali ireductibili este

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 7)(2x^2 + x + 1).$$

Trinomul $2x^2 + x + 1$ este pozitiv* pentru orice valoare reală a lui x, deci acest factor nu influențează semnul lui $P(x)$. Rămîne de studiat semnul produsului format din primii patru factori. Acest lucru se face cu ajutorul unui tabel ca cel de mai jos.

x		1		3		4		7	
$x-1$	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-3$	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$x-4$	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$x-7$	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$P(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

Se studiază semnul fiecărui factor în parte, apoi se completează ultimul rînd pe baza rîndurilor precedente. Se constată că polinomul își păstrează semnul cînd x variază între două rădăcini consecutive și își schimbă semnul ori de cîte ori x trece printr-o rădăcină.

Rezumat

- Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți *reali* $P(z)=0$ are rădăcina $u + vi$, ea are și rădăcina $u - vi$.

$$[P(u + vi) = 0] \Rightarrow [P(u - vi) = 0].$$

- Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți *raționali* $P(x) = 0$ are ca rădăcină iraționalul pătratic $m + n\sqrt{p}$, ea are și rădăcina $m - n\sqrt{p}$.

$$[P(m + n\sqrt{p}) = 0] \Rightarrow [P(m - n\sqrt{p}) = 0].$$

* Teorema cu privire la semnul trinomului $f(x) = ax^2 + bx + c$ în cazul rădăcinilor imaginare este o consecință a unei teoreme de analiză după care o funcție continuă într-un interval închis nu poate să-și schimbe semnul fără să se anuleze (4.2.2).

În adevăr, dacă ar exista două valori x_1 și x_2 astfel încît $f(x_1)$ și $f(x_2)$ să fie de semne contrare, ar exista $x_3 \in (x_1, x_2)$ pentru care trinomul se anulează, ceea ce este contrar ipotezei. Deci trinomul are semn constant. Deoarece $f(0) = c$, $f(x)$ are același semn cu c oricare ar fi $x \in R$. Pentru a obține regula uzuală (trinomul are același semn ca a oricare ar fi x), se observă că a și c au același semn, căci în cazul contrar am avea $ac < 0$, deci $b^2 - 4ac > 0$.

- Dacă numărul întreg p este o rădăcină a ecuației cu coeficienți *întregi* $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_n = 0$, atunci a_n este divizibil prin p.

$$[p \in Z,\ P(p) = 0] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p].$$

- Dacă fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$ este o rădăcină a ecuației cu coeficienți *întregi* $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_n = 0$, atunci a_n este divizibil prin p și a_0 este divizibil prin q.

$$\left[\frac{p}{q} \in Q,\ P\left(\frac{p}{q}\right) = 0\right] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p,\ a_0 \text{ divizibil prin } q].$$

- Orice polinom cu coeficienți reali se poate descompune în factori ireductibili de gradul I și II cu coeficienți reali.

Exerciții

Rădăcini imaginare

1. Să se rezolve ecuațiile următoare știind că fiecare din ele are rădăcina scrisă în dreptul ei.

a) $z^4 - 12z^3 + 50z^2 - 76z + 17 = 0$, $z_1 = 4 - i$;

b) $x^4 - 3\sqrt{5}\,z^3 + 11z^2 - 3\sqrt{5}\,z + 10 = 0$, $z_1 = i$;

c) $z^6 + z^5 - 8z^4 - 9z^3 + 11z^2 + 20z + 20 = 0$, $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

2. Se dau ecuațiile următoare. Să se determine pentru fiecare din ele coeficienții reali a și b astfel încît să admită rădăcina scrisă în dreptul ei.

a) $z^4 - 2z^3 - 14z^2 + az + b = 0$, $z_1 = -1 + i\sqrt{2}$;

b) $4z^4 + az^3 + bz^2 - 136z + 29 = 0$, $z_1 = \frac{5 - 2i}{2}$.

Calculul dă de la sine pentru a și b valori reale. Atunci de ce s-a pus în mod expres condiția ca a și b să fie reali? (v. problema următoare).

3. Se dă ecuația

$$P(z) = z^3 + az^2 + (8 + 3i)z - 4 - 2i = 0.$$

a) Să se determine a și să se rezolve ecuația, știind că are rădăcina $2 + i$.
b) Aceeași problemă, dacă se cere ca a să fie real.

4. Să se rezolve ecuația

$$z^3 - (5 - i)z^2 + (5 - 4i)z - 1 + i = 0$$

știind că admite rădăcina $1 - i$.

5. Unde intervine în demonstrația teoremei de la 3.1.5 (rădăcinile imaginare ale unei ecuații cu coeficienți reali) faptul că coeficienții ecuației sînt reali? De ce nu mai este teorema adevărată dacă ecuația are coeficienți complecși?

6. Să se formuleze și să se demonstreze o reciprocă a teoremei de la 3.1.5.

Rădăcini iraționale pătratice

7. Să se pună sub forma de iraționale pătratice numerele:

$$4 - 5\sqrt{32},\ 1 + \sqrt{\frac{3}{8}},\ 2 - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{10}}.$$

8. Să se rezolve ecuația următoare știind că admite rădăcina indicată:

a) $2x^4 - 11x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$, $x_1 = 3 - \sqrt{7}$;

b) $x^6 - 10x^4 + 31x^2 - 30 = 0$, $x_1 = \sqrt{2}$.

9. Să se determine parametrii raționali m și n astfel încît ecuația următoare să admită rădăcina indicată și să se rezolve:

a) $x^4 + mx^3 - x^2 - 2x + n = 0$, $x_1 = 2 + \sqrt{2}$;

b) $x^4 - 2x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0$, $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Aceeași problemă, dacă nu se pune condiția ca parametrii să fie raționali.

10. Se consideră ecuația

$$x^3 - 3x^2 + ax - \sqrt{2} = 0.$$

Să se determine a și să se rezolve ecuația, știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

11. a) Să se determine numerele raționale m și a astfel încît ecuația

a) $x^3 - 9x^2 + 25x + m = 0$; b) $x^3 - 4x^2 - 5x + m = 0$

să aibă o rădăcină egală cu $a + \sqrt{2}$ și să se rezolve apoi ecuația.

12. Să se determine coeficienții raționali m, n, p și q astfel încît ecuația

$$x^6 + mx^5 + nx^4 + 4x^3 + 23x^2 + px + q = 0$$

să admită rădăcinile $3 + \sqrt{11}$ și $2 - \sqrt{5}$ și să se rezolve.

13. *Se consideră ecuația

$$2x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 - x^2 + dx + 8 = 0.$$

Să se determine parametrii raționali a, b, c, d, astfel încît ecuația să admită rădăcinile $5 + i\sqrt{3}$ și $1 - \sqrt{2}$ și să se rezolve.

---

* În problemele 13—15 nu se vor face calculele; se va arăta numai calea de rezolvare.

14. *Se dau ecuațiile următoare

a) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c = 0$;

b) $x^5 + ax^4 - 8x^3 + 5x^2 + bx + c = 0$;

c) $x^5 + 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 6x + c = 0$.

Să se determine pentru fiecare din ele parametrii reali a, b, c astfel încît ecuația să admită rădăcina $1 + i\sqrt{3}$ și între două dintre rădăcinile ei α și β, deosebite de cea dată și de conjugata ei, să existe relația $\beta = 2\alpha$ și să se rezolve.

15. *Se dau ecuațiile

a) $2x^5 + ax^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + a = 0$;

b) $4x^5 - 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + 1 = 0$.

Să se determine pentru fiecare din ele parametrii reali a și b astfel încît ecuația să admită rădăcina $3 + 2i$ și o rădăcină dublă deosebită de cea dată și de conjugata ei.

16. Să se enunțe și să se demonstreze în legătură cu rădăcinile de forma $m + n\sqrt{p}$ ale unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali teoremele analoage cu cele de la 3.1.2—3.1.5. Se vor trata și chestiunile analoage cu cele de la problema 5 de la acest capitol.

Se va face o schemă analoagă cu cea de la 3.1.6.

17. Să se demonstreze teorema de la 3.1.4 despre valorile unui polinom cu coeficienți reali pentru două valori imaginar conjugate ale variabilei în cazul ecuației de gradul IV.

$$P(x) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + c \quad a, b, c, d \in R,$$

calculînd efectiv $P(u + vi)$ și $P(u - vi)$.

Se poate face demonstrația analoagă în cazul general, al unui polinom de gradul n?

18. O ecuație algebrică cu coeficienți reali admite numărul $a + bi$ ca rădăcină multiplă. Să se demonstreze că ea admite și $a - bi$ ca rădăcină multiplă de același ordin.

Să se enunțe și să se demonstreze o propoziție analoagă cu privire la rădăcinile multiple iraționale pătratice ale unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali.

19. a) Să se demonstreze că numărul rădăcinilor imaginare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali este par, oricare ar fi gradul ecuației. b) Ce se poate spune despre gradul unei ecuații algebrice cu coeficienți reali care are numai rădăcini imaginare? c) Să se formuleze și să se demonstreze propozițiile analoage cu privire la rădăcinile iraționale pătratice ale unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali.

20. a) Afirmația: „Dacă realizantul unei ecuații de gradul II este pozitiv, $b^2 - 4ac > 0$, ecuația are rădăcini reale" este justă? Să se verifice pe ecuația $z^2 - 2iz - 2 = 0$.

---

* În problemele 13—15 nu se vor face calculele; se va arăta numai calea de rezolvare.

b) Dar afirmația: „Dacă $b^2 - 4ac < 0$ ecuația are două rădăcini imaginare"? Exemplu: $z^2 - 2(1 + i)z + 1 + 2i = 0$.

c) Aceeași întrebare cu privire la afirmația: „Dacă realizantul unei ecuații de gradul II este un pătrat perfect, rădăcinile ecuației sînt raționale". Să se dea un contraexemplu.

Rădăcinile raționale ale unei ecuații cu coeficienți întregi

21. Reciproca propoziției de la 3.3.7 (cu privire la rădăcinile întregi ale unei ecuații cu coeficienți întregi) este adevărată?

22. Să se refacă demonstrația propoziției de la 3.3.7 pe cazul ecuației

$$x^3 + 2x^2 + 8x - 12 = 0.$$

23. Se dau ecuațiile următoare. Să se afle rădăcinile lor întregi și, cînd este posibil, să se afle și celelalte rădăcini.

a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12 = 0$;

b) $x^6 - 32x^4 + 32x^3 + 31x^2 - 92x + 60 = 0$;

c) $2x^5 + 11x^4 + 7x^3 - 20x^2 - 36x - 144 = 0$;

d) $x^4 - 33a^2x^2 - 28a^3x + 60a^4 = 0$; $a \in R$;

e) $x^4 - \sqrt{3}x^3 - 126x^2 + 258\sqrt{3}x - 756 = 0$;

f) $x^5 - 13x^4 + 65x^3 - 161x^2 + 200x - 100 = 0$.

24. Să se afle rădăcinile întregi ale ecuației

$$x^3 + \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - 8 = 0.$$

25. a) Să se determine numărul întreg a astfel încît ecuația

$$2x^4 + x^3 + ax + 1 = 0$$

să admită o rădăcină întreagă. b) Aceeași chestiune dacă se cere ca a să fie rațional sau real, nu neapărat întreg.

26. Ce relație trebuie să existe între numerele întregi p și q pentru ca ecuația

$$x^3 + px^2 + qx - 1 = 0$$

să admită o rădăcină întreagă?

27. Să se demonstreze că dacă toți coeficienții unei ecuații algebrice afară de unul sînt raționali, ecuația nu poate admite o rădăcină rațională. (Se poate considera cazul ecuației $ax^3 + bx^2 + \alpha x + c = 0$ unde $a, b, c \in Q$, $\alpha \notin Q$.)

28. Să se refacă demonstrația propoziției de la 3.3.9 pe cazul ecuației

$$4x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 0.$$

29. Reciproca propoziției de la 3.3.9 (cu privire la rădăcinile fracționare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi) este adevărată?

30. Cum se poate deduce propoziția de la 3.3.7 din propoziția de la 3.3.9?

31. Să se afle rădăcinile fracționare ale ecuațiilor următoare. Cînd este posibil, se vor afla și celelalte rădăcini.

a) $8x^4 + 26x^3 - 15x^2 - 2x + 1 = 0$;

b) $9x^4 + 9x^3 + 20x^2 - 32x + 8 = 0$;

c) $24x^5 + 106\,mx^4 + 57m^2x^3 - 20m^3x^2 - 15m^4x - 2m^5 = 0$; $m \in R$;

d) $20x^5 - 7ax^4 + 17a^2x^3 + 13a^3x^2 - 10a^4x - 3a^5 = 0$; $a \in R$;

e) $18x^5 - 51x^4 - 118x^3 + 249x^2 - 132x + 20 = 0$.

32. Să se rezolve ecuațiile următoare:

a) $2x^4 - 19x^3 + 59x^2 - 109x + 42 = 0$;

b) $4x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 44x^2 + 41x - 10 = 0$;

c) $6x^5 + 5ax^4 - 18a^2x^3 + 47a^3x^2 - 44a^4x + 12a^5 = 0$;

d) $32x^4 - 192x^3 - 14x^2 + 87x - 18 = 0$;

e) $6x^5 - 17x^4 - 22x^3 - 24x^2 - x + 4 = 0$.

33. Să se afle rădăcinile fracționare ale ecuației

$$x^3 - 1969x^2 + 157652x + 144653 = 0.$$

34. Să se rezolve sistemele următoare:

a) $x^3 + y^3 = 133$, $2x + y = 9$;

b) $x^2 + 2y + 5 = 0$, $4y^2 + 15x - 51 = 0$ (interpretare geometrică);

c) $x + y + z = 3$, $xy + yz + zx = -18$, $xyz = -40$;

d) $x + y + z + u = 0$, $xy + xz + xu + yz + yu + zu = -2$, $xyz + xyu + xzu + yzu = 11$, $xyzu = -30$;

e) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - y = 0$ (interpretare geometrică);

f) $4x^2 + 8x - 3y - 3 = 0$, $8x^2 + 9y^2 - 16x - 73 = 0$ (interpretare geometrică);

g) $3x^2 + 8y^2 = 35$, $2x^2 - 9x - 2y + 11 = 0$ (interpretare geometrică).

35. O ecuație algebrică cu coeficienți întregi în care primul coeficient este 1 poate avea rădăcini fracționare?

36. a) Să se determine numărul rațional m astfel încît ecuația

$$2x^3 - x^2 + mx + 1 = 0$$

să aibă o rădăcină fracționară; b) Aceeași problemă dacă se cere ca m să fie real, nu neapărat rațional.

37. Să se demonstreze cu ajutorul formulei de rezolvare a ecuației de gradul II că, dacă p și q sînt numere întregi, ecuația $x^2 + px + q = 0$ nu poate avea rădăcini fracționare.

38. a) Se constată pe toate exemplele că, dacă $\frac{p}{q} \in Q$ este o rădăcină a ecuației algebrice cu coeficienți întregi $P(x) = 0$, cîtul $P(x) : \left(x - \frac{p}{q}\right)$ este un polinom cu coeficienți întregi. Să se demonstreze că acest lucru se întîmplă totdeauna. b) Se constată, de asemenea, că toți coeficienții cîtului sînt divizibili prin q. Să se demonstreze că și acest lucru se întîmplă totdeauna.

39. Suma pătratelor primelor n numere naturale consecutive este 385. Să se afle n.

40. Primul termen al unei progresii geometrice este 5; suma primilor patru termeni este 425. Să se determine progresia.

41. Primul termen al unei progresii aritmetice este 3. Să se determine rația ei astfel încît produsul primilor patru termeni să fie 3465.

42. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic (exprimate în cm) formează o progresie aritmetică cu rația 2; volumul paralelipipedului este de 315 cm³. Să se afle dimensiunile lui.

43. Într-un triunghi dreptunghic, proiecția pe ipotenuză a uneia dintre catete este cu 9 cm mai mare decît a celeilalte. Aria triunghiului este de 45 cm². Să se afle proiecția catetei mai mici.

44. Într-un paralelipiped dreptunghic, una dintre laturile bazei este cu 1 cm mai lungă decît cealaltă, înălțimea paralelipipedului este egală cu diagonala bazei, iar volumul de 60 cm³. Se cer dimensiunile paralelipipedului.

45. Volumul unui cilindru circular drept este de 45π cm³, aria sa totală este de $48\ \pi$ cm². Se cer raza și înălțimea cilindrului.

46. Un corp are forma unui cilindru la care una din baze este înlocuită cu o emisferă de aceeași rază cu cilindrul situată în exterior. Înălțimea cilindrului este de 10 cm, iar volumul corpului este de 504π cm³. Se cere raza cilindrului.

Descompunerea în factori reali

47. Descompunerea unui polinom cu coeficienți reali în factori reali ireductibili este unică?

48. Să se scrie sub formă de produs de factori liniari și de gradul II cu coeficienți reali polinoamele care au rădăcinile următoare:

a) $z_1 = 3,\ z_2 = 2 + 5\mathrm{i},\ z_3 = 2 - 5\mathrm{i}$;

b) $z_1 = z_2 = 1 + \mathrm{i},\ z_3 = z_4 = 1 - \mathrm{i},\ z_5 = \frac{2}{3}$;

c) $z_1 = 2 + \sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{2},\ z_3 = z_4 = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_5 = z_6 = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

49. Să se descompună în factori reali ireductibili polinoamele de la exercițiile: 23 a, 23 c, 23 d, 23 f, 31 a, 31 b, 31 c, 32 a—32 c.

50. Să se simplifice fracțiile următoare:

a) $\frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$; b) $\frac{8x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 5x - 2}{24x^3 - 22x^2 + x + 2}$;

c) $\frac{4x^5 - x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 3}{3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2}$; d) $\frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{2x^3 - 13x^2 + 26x - 10}$.

51. Se poate formula o teoremă analoagă cu cea de la 3.4.3 cu privire la un polinom cu coeficienți raționali — folosind faptul că rădăcinile sale iraționale pătratice sînt conjugate două cîte două?

52. Să se studieze semnele polinoamelor de la exercițiile 32 a — 32 c.

53. Să se studieze semnele fracțiilor următoare. Răspunsul se va da sub forma de tabel ca la 3.4.5.

a) $\frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{(x - 3)^2 (x + 4)}$; b) $\frac{(x + 1)^3 (x - 2)}{(x - 1)(x - 5)^2}$;

c) $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}$; d) $\frac{2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{4x^4 + 5x^2 - 7x + 2}$.

54. Să se studieze semnul polinomului

$$P(z) = z^3 - (2 + \mathrm{i})z^2 + 2(1 + \mathrm{i})z - 2\mathrm{i}.$$

Rădăcinile sînt: $1 + \mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$ și i.

55. Ce se poate spune despre semnul unui polinom $P(x)$ cu coeficienți reali care are numai rădăcini imaginare?

56. Pe exemplul de la 3.4.5. se constată că: a) un polinom $P(x)$ cu coeficienți reali păstrează același semn cînd x variază între două rădăcini consecutive; b) el își schimbă semnul cînd x trece printr-o rădăcină. Aceste fapte sînt totdeauna adevărate?

Rezolvarea numerică a ecuaţiilor

4.0. Introducere

Am arătat (2.0) că nu există formule de rezolvare a ecuaţiilor algebrice de grad mai mare decît patru. Pentru ecuaţiile de gradul III şi IV există astfel de formule, dar ele prezintă unele inconveniente care fac ca ele să fie puţin utile în practică.

În această situaţie, nu rămîne decît să se găsească metode de a rezolva fiecare ecuaţie în parte.

În cele ce urmează vom trata aceste metode.

În acest capitol ne vom ocupa numai de ecuaţii cu coeficienţii reali şi vom căuta numai rădăcinile lor reale. Dat fiind că vom face apel numai la faptul că funcţiile care intervin sînt derivabile pe toată mulţimea lor de definiţie, eventual cu excepţia unui număr finit de puncte, metodele pe care le vom expune sînt valabile pentru orice ecuaţie $f(x) = 0$ în care f este o funcţie reală de o variabilă reală, derivabilă.

4.1. Separarea rădăcinilor prin metoda grafică

4.1.1. **Ce înseamnă a separa rădăcinile unei ecuaţii.** Un prim pas în rezolvarea unei ecuaţii se face dacă se află cîte rădăcini are şi se indică pentru fiecare rădăcină un interval în care se află. Această lucrare se numeşte *separarea rădăcinilor ecuaţiei.* De exemplu, fiind dată o ecuaţie, dacă stabilim că are trei rădăcini, una în intervalul $(-4, -3)$, alta în intervalul $(1, 2)$ şi a treia în intervalul $(5, 6)$, am separat rădăcinile ecuaţiei.

4.1.2. **Ecuaţii de forma $f(x) = 0$.** Fiind dată o ecuaţie $f(x) = 0$, se trasează curba a cărei ecuaţie este $y = f(x)$. Abscisele punctelor în care curba taie axa Ox sînt rădăcinile ecuaţiei. Ele se citesc într-o primă aproximare pe grafic, iar intervalul se restrînge prin încercări, precum arată exemplele următoare.

4.1.3. **Exemplu.** Să se separe rădăcinile ecuaţiei

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0, \quad x \in R.$$

Derivata, $3x^2 - 6x - 9$, se anulează pentru $x_1 = -1$ şi $x_2 = 3$. Tabloul variaţiei este cel de mai jos, iar graficul se vede în figura 2 (s-a luat pe Oy o unitate de 3 ori mai mică decît pe Ox).

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-17	$\nearrow$	$+\infty$

Pe o schiţă cît de sumară se vede că ecuaţia are trei rădăcini reale date de abscisele punctelor A, B şi C.

Ca să găsim un interval mai mic pentru rădăcina dată de punctul A, introducem în polinomul dat valorile -2, -3, ... pînă cînd obţinem pentru $f(x)$ o valoare negativă. Calculele se fac cu ajutorul schemei lui Horner. Se găseşte $P(-2) = 8 > 0$, $P(-3) = -17 < 0$; deci rădăcina se află în intervalul $(-3, -2)$. Pentru rădăcina a doua, graficul arată că ea se află între 0 şi 3. Calculul dă $P(0) = 10 > 0$, $P(1) = -4 < 0$, deci această rădăcină se află în intervalul $(0, 1)$. Tot prin încercări se află că $P(4) = -10 < 0$, $P(5) = 15 > 0$, deci rădăcina a treia se găseşte în intervalul $(4, 5)$.

Am separat rădăcinile ecuaţiei. Ecuaţia are trei rădăcini reale x_1, x_2, şi x_3.

$$x_1 \in (-3, -2),$$

$$x_2 \in (0, 1), \quad x_3 \in (4, 5).$$

4.1.4. **Ecuaţii de forma $f(x) = g(x)$.** Considerăm o ecuaţie de forma

$$f(x) = g(x),$$

de exemplu

$$x^3 = x + 2, \qquad e^x = x^2 - x - 2 \text{ etc.}$$

unde $f(x)$ şi $g(x)$ sînt două expresii care conţin variabila reală x şi presupunem că funcţiile definite de ele pe R sau pe o submulţime a lui R sînt derivabile pe toată mulţimea de definiţie afară, eventual, de

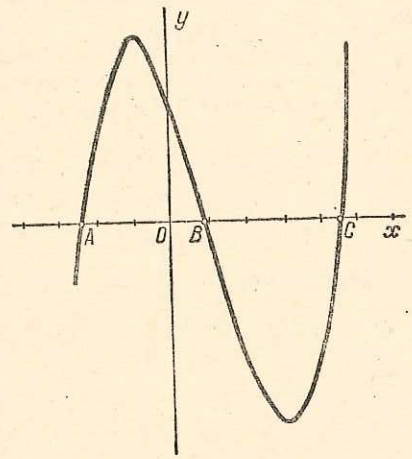

Fig. 2.

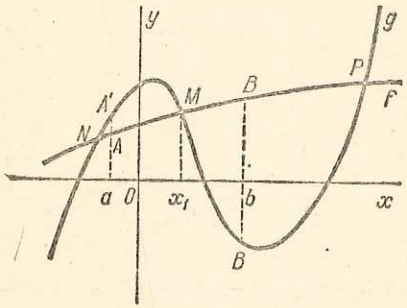

Fig. 3.

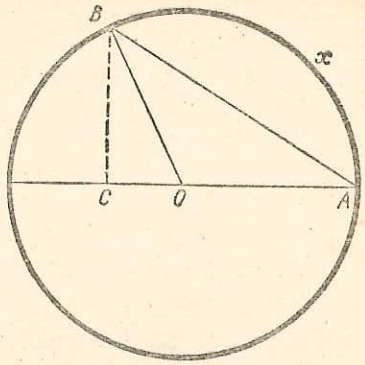

Fig. 4.

un număr finit de puncte. Considerăm curbele f şi g (fig. 3) ale căror ecuaţii sînt $y = f(x)$ şi $y = g(x)$.

Cum putem găsi cu ajutorul acestor curbe rădăcinile ecuaţiei?

Numărul a nu este rădăcină a ecuaţiei, căci $f(a) < g(a)$, ordonata punctului A este mai mică decît ordonata punctului A'; nici b nu este rădăcină a ecuaţiei căci $f(b) > g(b)$. În schimb x_1 este rădăcină a ecuaţiei, căci paralela la Oy prin punctul $(x_1, 0)$ taie ambele curbe în acelaşi punct M; $f(x_1) = g(x_1)$, = ordonata punctului M. Abscisele punctelor N şi P sînt de asemenea rădăcini ale ecuaţiei considerate.

Rădăcinile ecuaţiei $f(x) = g(x)$ sînt abscisele punctelor de intersecţie ale curbelor $y = f(x)$ şi $y = g(x)$.

4.1.5. **Exemplu.** *Fiind dat un cerc cu centrul O, să se găsească un arc al său AB astfel încît coarda AB să împartă sectorul AOB în două părţi echivalente*.*

Condiţia din enunţul problemei este echivalentă cu aceea ca aria triunghiului AOB să fie jumătate din aria sectorului OAB (fig. 4.) Fie R raza cercului şi x măsura în radiani a arcului căutat AB.

$$\text{aria triunghiului } AOB = \frac{OA \cdot BC}{2} = \frac{R \cdot R \sin x}{2} = \frac{R^2 \sin x}{2};$$

$$\text{aria sectorului } OAB = \frac{(\text{lungimea arcului } AB) \cdot \text{raza}}{2} = \frac{Rx \cdot R}{2} = \frac{R^2 x}{2}.$$

Condiţia este

$$\frac{R^2 \sin x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 x}{2}$$

sau

$$\sin x = \frac{x}{2}.$$

* Această problemă a fost tratată chiar de Euler.

Sîntem în cazul considerat, ecuaţia este de forma $f(x) = g(x)$ cu $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{x}{2}$.

În figura 5 se văd graficele funcţiilor $\sin x$ şi $\frac{x}{2}$, $x \in R$. Ele se taie într-un singur punct M, a cărui abscisă este cuprinsă între $\frac{\pi}{2}$ şi π. Ecuaţia are o singură soluţie situată în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

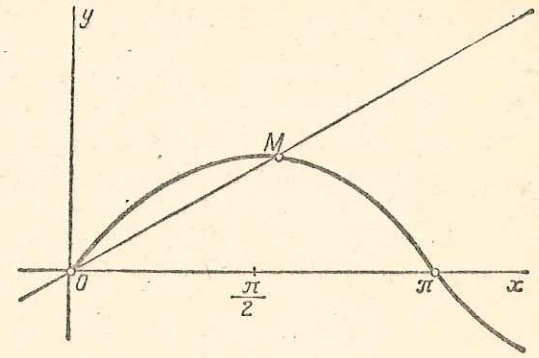

Fig. 5.

Ecuaţia din acest exemplu nu este algebrică pentru că $\sin x - \frac{x}{2}$ nu este un polinom; este o ecuaţie *transcendentă.*

4.1.6. **Observări.** 1) Forma $f(x) = 0$, este un caz particular al formei $f(x) = g(x)$, şi anume cazul în care $g(x)$ este funcţia constantă zero. Graficul acestei funcţii este axa Ox; ea joacă acum rolul curbei $y = g(x)$.

2) Metoda expusă aici se poate aplica uneori cu folos şi atunci cînd ecuaţia dată are forma $f(x) = 0$. Astfel, ecuaţia $x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$ (de la 4.1.3) se poate pune sub forma

$$x^3 - 3x^2 = 9x - 10.$$

Atunci rădăcinile ei sînt abscisele punctelor de intersecţie ale curbei $y = x^3 - 3x^2$ cu dreapta $y = 9x - 10$.

Ecuaţia poate fi pusă şi sub forma

$$x^3 = 3x^2 + 9x - 10.$$

Dacă avem curba $y = x^3$ gata trasată (ceea ce ar fi util atunci cînd avem de rezolvat multe ecuaţii de gradul III), căutăm punctele ei de intersecţie cu parabola $y = 3x^2 + 9x - 10$, care se construieşte uşor.

4.1.7. **Discuţia unei ecuaţii care depinde de un parametru.** Considerăm, de exemplu, ecuaţia

$$P(x) = x^3 - ax^2 + a = 0, \qquad (1)$$

în care a reprezintă un număr real variabil. De fapt, avem aici o infinitate de ecuaţii. Pentru $a = 1, 2, 3, \ldots$ avem, respectiv, ecuaţiile $x^3 - x^2 + 1 = 0$, $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$, $x^3 - 3x^2 + 3 = 0, \ldots$ A discuta ecuaţia propusă în raport cu parametrul a înseamnă a găsi cîte rădăcini reale are fiecare dintre aceste ecuaţii.

Rezolvăm ecuația în raport cu a:

$$\frac{x^3}{x^2-1}=a. \tag{2}$$

Ecuația (2) este echivalentă cu (1). În adevăr, ecuația (2) se obține din (1) împărțind ambele părți din (1) prin x^2-1 (și trecînd a în partea dreaptă). Or, $P(1)=1\neq 0$, $P(-1)=-1\neq 0$, deci 1 și -1 nu sînt rădăcini ale ecuației (1), deci $x^2-1\neq 0$.

Urmează să studiem ecuația (2). Ea are forma $f(x)=g(x)$, unde

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1},\ g(x)=a,\ x\in R\setminus\{-1,\ 1\}$$

(g este funcția constantă $g: R\to R$, cu $g(x)=a$ pentru orice $x\in R$).

Construim curbele $y=f(x)$ și $y=g(x)$.

Pentru prima curbă, avem:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Tabloul de variație este cel de mai jos, iar curba se vede în figura 6. Ea are prima bisectoare ca asimptotă, un maxim în punctul $A\left(-\sqrt{3},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ și un minim în punctul $B\left(\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty\ \|+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty\ \|+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$

Curba $y=g(x)=a$ este o dreaptă paralelă cu axa Ox, de exemplu cea notată cu (1) în figura 6. Rădăcinile reale ale ecuației propuse sînt abscisele punctelor de intersecție a acestei drepte cu curba. Dacă dreapta are poziția (1), ecuația are trei rădăcini reale, și anume abscisele punctelor M, N și P. Cît despre intervalele în care se găsesc aceste rădăcini, una, dată de abscisa punctului M, este undeva la stînga punctului $-\sqrt{3}$, adică la intervalul $(-\infty,\ -\sqrt{3})$, o altă rădăcină, abscisa punctului N, se află în intervalul $(-\sqrt{3},\ -1)$, iar a treia rădăcină, abscisa punctului P, se află în intervalul (0,1).

Rămîne acum să studiem cum variază numărul punctelor de intersecție a dreptei cu curba atunci cînd dreapta se deplasează rămînînd paralelă cu axa Ox.

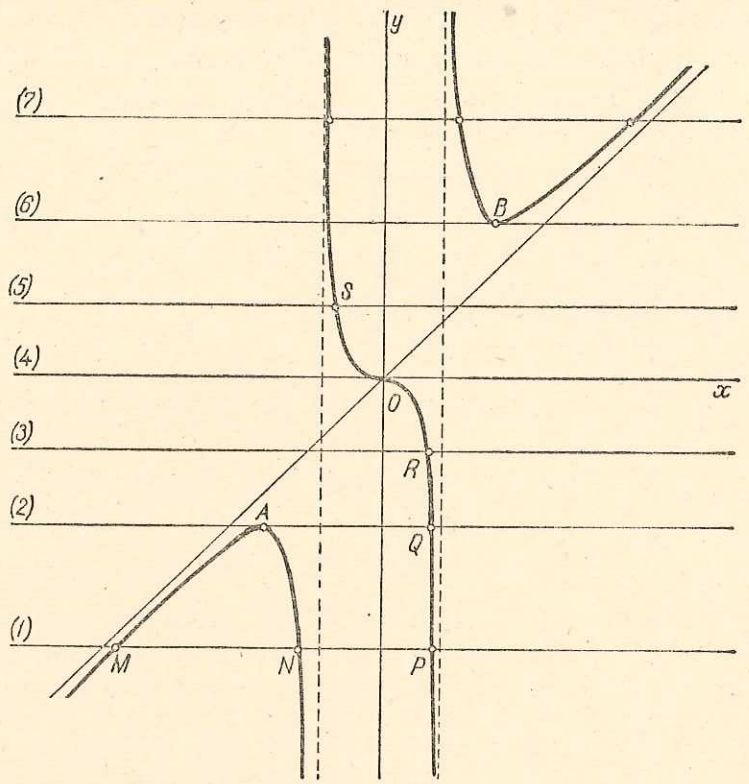

Fig. 6.

Dreapta (2) corespunde cazului cînd $a=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Cîtă vreme $a<-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, adică dreapta mobilă se află sub dreapta (2), ca de exemplu dreapta (1) ecuația are trei rădăcini reale, cîte una în fiecare dintre intervalele $(-\infty,\ -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\ -1)$, $(0,\ 1)$. Cînd dreapta mobilă coincide cu dreapta (2), adică $a=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, ea are două puncte comune cu curba: punctul A, de abscisă $-\sqrt{3}$ și punctul Q a cărui abscisă se află în intervalul (0, 1), deci ecuația are o rădăcină egală cu $-\sqrt{3}$ și alta situată în intervalul (0, 1).

Rădăcina $-\sqrt{3}$, care corespunde punctului A în care dreapta este tangentă la curbă, este o rădăcină dublă.

Cînd dreapta ajunge în poziția (3), adică ea este mai sus de punctul A, dar mai jos de O, adică $-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a < 0$, ecuația are o singură rădăcină, dată de abscisa punctului R, situată în intervalul (0,1) ș.a.m.d.

Discuția se rezumă în tabloul următor:

	Valorile lui a	*Numărul rădăcinilor reale ale ecuației și intervalele în care se găsesc**
(1)	$a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(0, 1)$
(2)	$a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$, $(0, 1)$
(3)	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a < 0$	$(0, 1)$
(4)	$a = 0$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$**
(5)	$0 < a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(-1, 0)$
(6)	$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = \sqrt{3}$, $(-1, 0)$
(7)	$a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(-1, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$

În cazul (2) ecuația poate fi rezolvată pînă la capăt. Polinomul

$$P(x) = x^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\left(\text{am înlocuit } a \text{ prin } -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ se împarte prin $x+\sqrt{3}$, folosind schema

* Nu am mai menționat care este numărul rădăcinilor. Dacă se indică, de exemplu, trei intervale, se înțelege de la sine că ecuația are trei rădăcini reale, cîte una în fiecare dintre intervalele indicate.

** Cu privire la forma curbei în vecinătatea unui punct în care ecuația are o rădăcină triplă, vezi capitolul II, problema nr. 76.

lui Horner, cîtul se împarte din nou prin $x+\sqrt{3}$ și rămîne ecuația $x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, care dă $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Această rădăcină se găsește în adevăr în intervalul (0, 1) — cum s-a prevăzut. Așadar, dacă $a = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ ecuația are rădăcinile

$$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În mod analog se află că, dacă $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, rădăcinile ecuației sînt

$$x_1 = x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.1.8. **Alt exemplu.** *Să se discute în raport cu parametrul a ecuația transcendentă*

$$e^x = ax.$$

Metoda I. Construim curbele $y = e^x$ și $y = ax$. Prima este curba exponențială (fig. 7), iar a doua este o dreaptă de pantă a care trece prin origine. Cînd a variază, dreapta se rotește în jurul originii. Se vede pe grafic că sînt posibile patru cazuri: 1) dreapta nu taie curba, 2) dreapta este tangentă la curbă, 3) dreapta taie curba în două puncte, 4) dreapta taie curba într-un singur punct. Trebuie să aflăm pentru ce valoare a lui a dreapta este tangentă la curbă. Fie (u, e^u) un punct oarecare al curbei. Panta tangentei la curbă în acest punct este derivata funcției în punctul u, adică e^u, deci ecuația tangentei este

$$y - e^u = e^u(x - u);$$

$$e^u x - y + e^u(1 - u) = 0.$$

Condiția ca tangenta să treacă prin origine este $e^u(1 - u) = 0$ (am anulat termenul liber), adică $u = 1$.

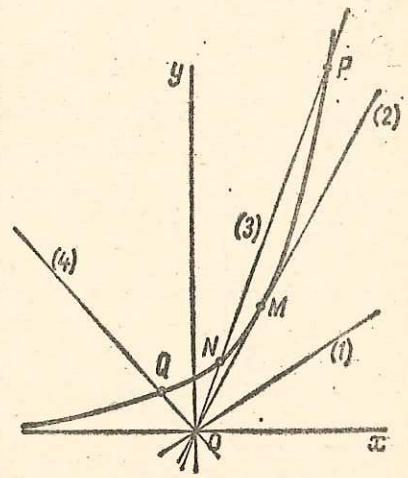

Fig. 7.

Deci panta tangentei din origine la curbă este $e^1 = e$; dreapta $y = ax$ este tangentă la curbă dacă $a = e$. Coordonatele punctului de contact M sînt $x = 1$, $y = e$.

Acum avem toate elementele pentru a face discuția.

	Valorile lui a	*Numărul rădăcinilor și intervalele în care se găsesc*
(1)	$0 \leqslant a < e$	nici o rădăcină
(2)	$a = e$	$x = 1$ (abscisa punctului M*)
(3)	$a > e$	$(0, 1)$, $(1, \infty)$ (abscisele punctelor N și P)
(4)	$a < 0$	$(-\infty, 0)$ (abscisa punctului Q)

Metoda II. Punem ecuația sub forma

$$\frac{e^x}{x} = a.$$

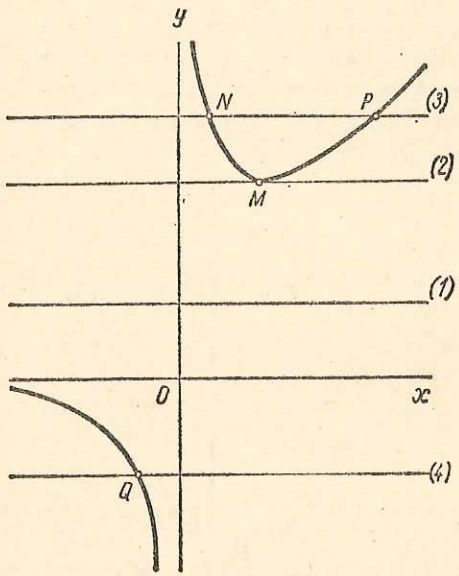

Fig. 8.

Construim curba

$$y = f(x) = \frac{e^x}{x}$$

și o tăiem cu dreapta variabilă $y = a$.

Funcția f este definită pe $R \setminus \{0\}$. Derivata, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ se anulează pentru $x = 1$. Tabloul de variație este cel de mai jos și curba se vede în figura 8.

x	$-\infty$		0		1	∞
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗ ∞

* $x = 1$ nu este o rădăcină dublă. Noțiunea de rădăcină multiplă se definește numai pentru ecuații algebrice.

Trebuie să deosebim 4 cazuri indicate în figură. Rezultatul discuției concordă cu cel precedent. Dreptele au fost numerotate la fel ca în soluția precedentă, de asemenea și punctele M, N, P, Q care indică rădăcinile ecuației.

4.1.9. **Cazul cînd rădăcinile trebuie să fie într-un interval dat.** *Să se discute ecuația*

$$\sin^3 \alpha + 3\cos^2\alpha + a = 0$$

în raport cu parametrul real a.

Înlocuim $\cos^2\alpha$ prin $1 - \sin^2\alpha$ și punem $\sin \alpha = x$. Ecuația devine

$$x^3 - 3x^2 + a + 3 = 0$$

Pentru ca o rădăcină a acestei ecuații să satisfacă ecuația propusă, nu este suficient ca ea să fie reală: ea trebuie să fie cuprinsă în intervalul închis $[-1, 1]$, deoarece $\sin \alpha$ ia numai valori din acest interval. De aceea ecuația trebuie considerată pe intervalul $[-1, 1]$.

Procedăm la început ca în exemplul precedent. Punem ecuația sub forma

$$x^3 - 3x^2 = -a - 3$$

și construim graficul funcției $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in R$. Derivata $f'(x) = 3x^2 - 6x$ se anulează pentru $x = 0$ și $x = 2$. Tabloul variației este cel de mai jos iar curba se vede în figura 9.

x	$-\infty$		0		2	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗ ∞

Ne interesează restricția acestei funcții pe intervalul $[-1, 1]$. Graficul ei este arcul de curbă AB cuprins între dreptele (D) și (D'), $x = -1$ și $x = 1$.

$$f(-1) = -4, \quad f(1) = -2.$$

Deci coordonatele punctului A sînt $x = -1$, $y = -4$, coordonatele punctului B sînt $x = 1$, $y = -2$.

Urmează să tăiem curba cu dreapta mobilă $y = -a - 3$.

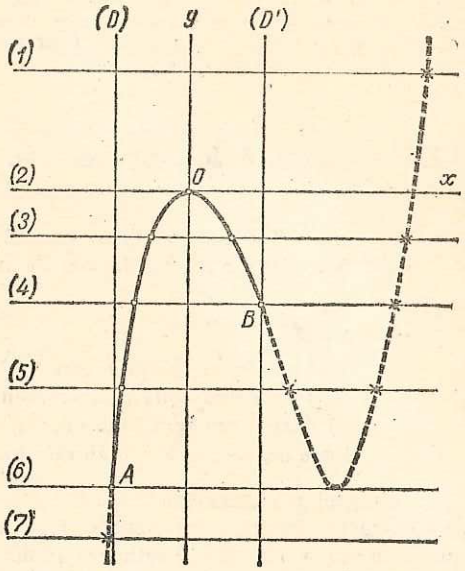

Fig. 9.

Figura arată că trebuie să deosebim cazurile următoare:

1) dreapta mobilă este deasupra axei Ox; 2) ea coincide cu axa Ox; 3) ea se află sub axa Ox dar mai sus decît punctul B; 4) dreapta trece prin punctul B; 5) ea se găsește sub punctul B, dar mai sus decît punctul A; 6) ea trece prin punctul A; 7) dreapta se află sub punctul A.

Cazul 1) este caracterizat prin $y = -a-3 > 0$, deci $a < -3$; cazul 2) este caracterizat prin $y = -a-3 = 0$, deci $a = -3$; cazul 3) prin $-2 < -a-3 < 0$, deci $-3 < a < -1$; ș.a.m.d.

Rădăcinile ecuației sînt abscisele punctelor de intersecție ale arcului de curbă AB cu dreapta $y = -a-1$.

Rezultatul discuției este redat în tabloul de mai jos:

	Valorile lui a	*Numărul rădăcinilor și intervalele în care se găsesc*
(1)	$a < -3$	nici o rădăcină
(2)	$a = -3$	$x_1 = x_2 = 0$,
(3)	$-3 < a < -1$	$(-1, 0)$, $(0, 1)$
(4)	$a = -1$	$x_1 = 1$, $x_2 \in (-1, 0)$
(5)	$-1 < a < 1$	$(-1, 0)$
(6)	$a = 1$	$x = -1$
(7)	$a > 1$	nici o rădăcină

4.2. Separarea rădăcinilor pe baza teoremei lui Rolle

4.2.1. **Teorema lui Rolle.** Amintim teorema lui Rolle cunoscută de la analiză. „Fie f o funcție definită pe un interval I și a, b două puncte din I cu $a < b$.

Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);

3) f are valori egale în a și b, $f(a) = f(b)$; atunci există (cel puțin) un punct c între a și b, $a < c < b$, în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$".

Interpretarea geometrică a acestei teoreme este dată de figura 10. A și B fiind puncte ale graficului funcției f cu aceeași ordonată, există între a și b cel puțin un punct c în care funcția are un maxim sau un minim (în cazul figurii există trei puncte de extrem c_1, c_2 și c_3).

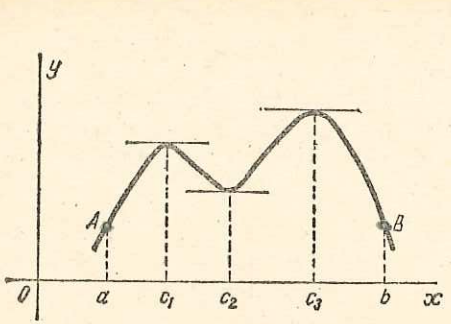

Fig. 10.

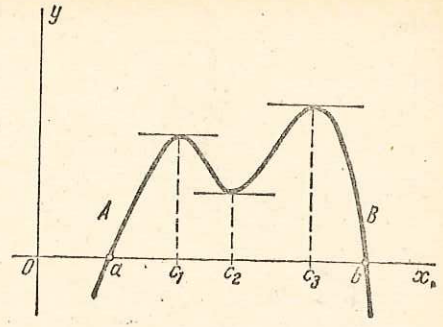

Fig. 11.

Un caz particular important este cel în care $f(a) = f(b) = 0$ (fig. 11) și funcția nu se anulează între a și b. Atunci a și b sînt două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x) = 0$ și c este o rădăcină a derivatei, $f'(c) = 0$. În acest caz teorema se poate enunța (simplificat) astfel:

Între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o rădăcină a ecuației $f'(x) = 0$. Simbolic:

$[f(a) = 0,\ f(b) = 0] \Rightarrow [\exists\ c,\ c \in (a, b)$ **astfel încît** $f'(c) = 0]$.

4.2.2. **O proprietate a funcțiilor continue.** **Fie f o funcție continuă pe un interval închis $[x_1, x_2]$, $y_1 = f(x_1)$ și $y_2 = f(x_2)$ valorile funcției f la capetele acestui interval și y_3 un număr cuprins între y_1 și y_2 $(y_1 < y_3 < y_2)$. În intervalul (x_1, x_2) există cel puțin un punct x_3 astfel încît să avem $y_3 = f(x_3)$.**

În figura 12 se dă o justificare intuitivă a acestei teoreme.

Fie arcul AB graficul funcției f în intervalul $[x_1, x_2]$ și y_3 un punct oarecare situat între y_1 și y_2. Ducem prin y_3 o paralelă la Ox. Arcul AB fiind neîntrerupt, această paralelă trebuie să-l întîlnească într-un punct (sau în mai multe). Fie M acest punct. Ducem prin M o paralelă la Oy; ea va tăia Ox într-un punct x_3 situat între x_1 și x_2. Deci, există un punct $x_3 \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(x_3) = y_3$.

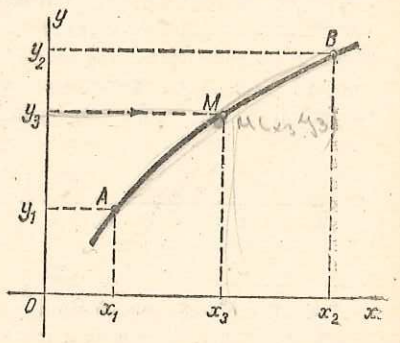

Fig. 12.

Un enunț simplificat al acestei teoreme este: *o funcție continuă nu trece de la o valoare la alta fără să treacă prin toate valorile intermediare.*

Un caz particular important este cînd $f(x_1)$ și $f(x_2)$ sînt de semne contrare și

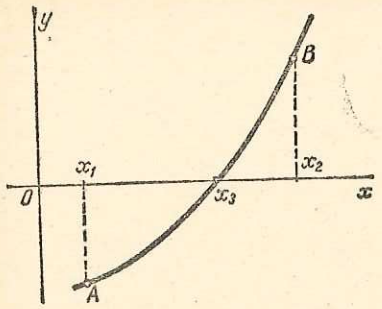

Fig. 13.

se ia $y_3 = 0$ (fig. 13). În intervalul (x_1, x_2) există cel puțin un punct x_3 astfel încît $f(x_3)$ să fie egal cu zero.

Dacă funcția f este continuă pe un interval închis $[x_1, x_2]$ *și* $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$* *există între* x_1 *și* x_2 *cel puțin un punct* x_3 *astfel încît să avem* $f(x_3) = 0$.

Simbolic,

$$[f(x_1)\cdot f(x_2) < 0] \Rightarrow [\exists\, x_3,\ x_3 \in (x_1, x_2) \text{ astfel încît } f(x_3) = 0].$$

Enunț simplificat: *o funcție continuă nu poate să-și schimbe semnul fără să se anuleze.*

4.2.3. **Șirul lui Rolle.** Considerăm o ecuație

$$f(x) = 0$$

unde f este o funcție derivabilă (deci și continuă) într-un interval (a, b). Fie α și β (fig. 14) două rădăcini *consecutive* ale derivatei $f'(x) = 0$, $\alpha, \beta \in (a, b)$. Cîte rădăcini poate avea ecuația $f(x) = 0$ între α și β?

Dacă între α și β ar exista două rădăcini, x_1 și x_2 ale ecuației $f(x) = 0$, atunci, conform teoremei lui Rolle, între x_1 și x_2 ar exista cel puțin un punct, să-l numim γ, în care derivata se anulează, $f'(\gamma) = 0$. Dar atunci α și β n-ar mai fi rădăcini consecutive ale derivatei. Rezultă că, *între* α *și* β *există cel mult o rădăcină a ecuației.*

Sînt două posibilități: 1) între α și β există o singură rădăcină a ecuației, 2) între α și β nu există nici o rădăcină a ecuației. Totul depinde de valorile funcției f în punctele α și β. Va trebui să deosebim trei cazuri.

a) $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$. Funcția f fiind continuă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, ultima propoziție 4.2.2. arată că ecuația $f(x) = 0$ are în intervalul (α, β) cel puțin o rădăcină. Dar două sau mai multe rădăcini nu pot exista. Rezultă că în acest caz *ecuația are în intervalul* (α, β) *o singură rădăcină.*

b) $f(\alpha)\, f(\beta) > 0$. Considerăm, de exemplu (fig. 15), cazul cînd $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) > 0$, $f(\alpha) < f(\beta)$. Să presupunem că ecuația ar avea în intervalul (α, β) o rădăcină x_1. În punctul x_1 funcția f ia valoarea zero, $f(x_1) = 0$, în punctul β funcția ia valoarea $f(\beta) > 0$, și am presupus că $f(\alpha) < f(\beta)$, deci $f(\alpha)$ este cuprins între $f(x_1)$ și $f(\beta)$. Funcția f fiind continuă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, este continuă și pe $[x_1, \beta]$, deci putem să-i aplicăm prima propoziție de la 4.2.2.: în intervalul (x_1, β) există cel puțin un

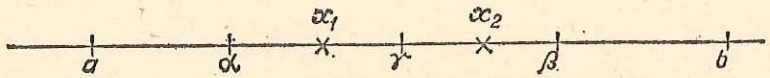

Fig. 14.

* Pentru a exprima că două numere reale x și y sînt de semne contrare, se scrie că $xy < 0$, pentru a exprima că ele sînt de același semn, se scrie că $xy > 0$, iar pentru a exprima că unul din ele este egal cu zero, se scrie că $xy = 0$.

punct x_1 astfel încît să avem $f(x_1') = f(\alpha)$. Teorema lui Rolle aplicată intervalului $[\alpha, x_1']$ arată că în acest interval există cel puțin un punct γ în care derivata se anulează, $f'(\gamma) = 0$. Atunci α și β nu mai sînt rădăcini consecutive ale derivatei — ceea ce este contrar ipotezei. Contradicția provine de la faptul că am admis că ecuația are în intervalul (α, β) o rădăcină x_1. Rezultă că ecuația nu are în intervalul (α, β) nici o rădăcină.

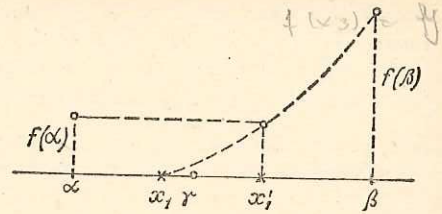

Fig. 15.

Dacă $f(\alpha) > f(\beta)$ raționamentul se poate repeta întocmai, cu singura deosebire că $f(\beta)$ este cuprins între $f(x_1)$, care este egal cu zero, și $f(\alpha)$ și se folosește faptul că funcția f este continuă în intervalul $[\alpha, x_1']$, apoi se aplică teorema lui Rolle în intervalul $[x_1', \beta]$.

Cazul $f(\alpha) = f(\beta)$ este exclus, căci, în acest caz, conform teoremei lui Rolle, între α și β s-ar găsi o rădăcină a derivatei, deci α și β n-ar mai fi rădăcini consecutive ale derivatei. La același rezultat se ajunge dacă se presupune că $f(\alpha) < 0$ și $f(\beta) < 0$. Așadar, *dacă* $f(\alpha)$ *și* $f(\beta)$ *au același semn, ecuația nu are în intervalul* (α, β) *nici o rădăcină.*

c) $f(\alpha) = 0$ sau $f(\beta) = 0$. Considerăm, de exemplu, cazul cînd $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) \neq 0$. Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ ar avea în intervalul (α, β) o rădăcină x_1. Teorema lui Rolle, aplicată în intervalul (α, x_1) arată că în acest interval există cel puțin un punct γ în care derivata se anulează, deci α și β n-ar mai fi rădăcini consecutive ale derivatei. Rezultă că, în acest caz, *ecuația nu are în intervalul* (α, β) *nici o rădăcină.*

Așadar, α și β *fiind două rădăcini consecutive ale derivatei, dacă* $f(\alpha)$ *și* $f(\beta)$ *sînt de semne contrare, ecuația are în intervalul* (α, β) *o singură rădăcină; dacă* $f(\alpha)$ *și* $f(\beta)$ *sînt de același semn, sau* $f(\alpha) = 0$ *sau* $f(\beta) = 0$, *ecuația nu are în intervalul* (α, β) *nici o rădăcină.*

Rămîne să vedem cîte rădăcini are ecuația mai mici decît cea mai mică rădăcină și cîte mai mari ca cea mai mare rădăcină a derivatei.

Fie α_1 cea mai mică rădăcină a derivatei. Dacă ecuația ar admite două rădăcini, x_1 și x_2, mai mici decît α_1 (fig. 16), conform teoremei lui Rolle, derivata s-ar anula pentru o valoare γ cuprinsă între x_1 și x_2, deci $\gamma < \alpha_1$ și, prin urmare α_1 n-ar mai fi cea mai mică rădăcină a derivatei. Rezultă că *ecuația are cel mult o rădăcină mai mică decît cea mai mică rădăcină a derivatei.*

Pentru a decide care din cele două cazuri posibile se produce, se fac asupra comportării funcției f în intervalul (a, α_1) considerațiile pe care le-am făcut mai înainte referitor la intervalul (α, β) determinat de două rădăcini consecutive ale derivatei (a joacă rolul lui α și α_1 al lui β) și se ajunge la aceeași concluzie ca mai

Fig. 16.

înainte. Se poate spune că, în problema de care ne ocupăm, *extremitatea stîngă a intervalului (a, b) în care studiem funcția joacă același rol ca rădăcinile derivatei.*

Dar acum intervine $f(a)$ în loc de $f(x)$ și se poate întîmpla ca funcția f să nu fie definită pentru $x = a$ sau a să fie $-\infty$. Atunci, în loc de $f(a)$, se ia $\lim_{x\to a} f(x)$, căci, pentru valori ale lui x suficient de apropiate de a, $f(x)$ are același semn cu această limită. Pentru uniformitate, vom spune că $\lim_{x\to a} f(x)$ este valoarea funcției pentru $x = a$.

Se arată în mod analog că *extremitatea dreaptă b a intervalului în care se studiază ecuația joacă același rol ca rădăcinile derivatei.*

De aici rezultă următorul procedeu de separare a rădăcinilor unei ecuații $f(x) = 0$.

Se scriu în ordine crescătoare rădăcinile derivatei, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, precum și extremitățile a și b ale intervalului de definiție a funcției f, iar dedesubt valorile corespunzătoare ale funcției.

x	a	x_1	$x_2 \ldots$	x_n	b
$f(x)$	$\lim_{x\to a} f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2) \ldots$	$f(x_n)$	$\lim_{x\to b} f(x)$

Dacă la capetele unuia dintre intervalele $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$ funcția f ia valori de semne contrare (prezintă o variație), ecuația are în acel interval o singură rădăcină; dacă, însă, valorile funcției sînt de același semn sau una din ele este egală cu zero, ecuația nu are în acel interval nici o rădăcină.

Deoarece aceste intervale acoperă toată mulțimea de definiție a funcției f, am separat rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

Rîndul al doilea din tabelul de mai sus se numește *șirul lui Rolle.*

Exemple.

4.2.4. Ecuație algebrică cu coeficienți determinați. *Să se separe rădăcinile ecuației*

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10 = 0.$$

Derivata, $f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$, se anulează pentru $x = 0$, $x = -1$ și $x = 2$. Formăm șirul lui Rolle.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+5$	$+10$	-22	$+\infty$

La extremitățile intervalului $(-\infty, -1)$ funcția f are același semn, deci în acest interval ecuația nu are nici o rădăcină; în intervalul $(-1, 0)$, situația este aceeași; la extremitățile intervalului $(0, 2)$ funcția are valori de semne contrare, $+10$ și -22, deci în acest interval ecuația are o singură rădăcină; în intervalul $(2, \infty)$ situația este aceeași ca în intervalul precedent. Așadar, ecuația propusă are două rădăcini reale, x_1 și x_2,

$$x_1 \in (0, 2) \qquad x_2 \in (2, \infty).$$

Prin încercări (v. 4.1.3), aceste intervale se reduc la $(1, 2)$ și $(2, 3)$. Celelalte două rădăcini sînt imaginare.

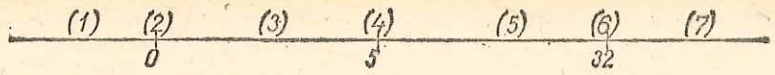

Fig. 17.

4.2.5. Ecuație cu un parametru. *Să se discute în raport cu parametrul real a rădăcinile reale ale ecuației* (v. 4.2.4)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0.$$

Șirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$a - 5$	a	$a - 32$	$+\infty$

Ne interesează semnele expresiilor din rîndul al doilea. Ele sînt date de tabelele:

a	$-\infty$	5	$+\infty$
$a - 5$	$-$	0	$+$

a	$-\infty$	0	$+\infty$
a	$-$	0	$+$

a	$-\infty$	32	$+\infty$
$a - 32$	$-$	0	$+$

Valorile remarcabile ale parametrului a sînt : 5, 0 și 32. Pentru a ști cîte cazuri trebuie să deosebim, le scriem în ordine crescătoare (fig. 17). Trebuie să deosebim cazurile următoare: $a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 5$, $a = 5$, $5 < a < 32$, $a = 32$, $a > 32$.

Discuția se face întocmind tabloul următor.

	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
a	$+\infty$	$a - 5$	a	$a - 32$	$+\infty$	concluzii
$a < 0$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$
$a = 0$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 0$, $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$
$a < a < 5$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ $(0, 2)$, $(2, \infty)$
$a = 5$	$+$	0	$+$	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = -1$ $(0, 2)$, $(2, \infty)$
$5 < a < 32$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$(0, 2)$, $(2, \infty)$
$a = 32$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = 2$
$a > 32$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină reală

Iată cum se procedează.

La stînga liniei verticale se trec toate cazurile considerate, tabloul va avea în cazul de față 7 rînduri, iar deasupra liniei verticale se scrie șirul lui Rolle. Apoi se completează partea de mijloc a tabloului.

În prima coloană se scrie peste tot „+", căci $f(-\infty) = +\infty$ oricare ar fi valoarea lui a.

În coloana a doua, care corespunde lui $a - 5$, se pune zero în linia care corespunde lui $a = 5$, în rîndurile de deasupra se pune semnul „−", iar în cele de dedesubt semnul „+" pentru a exprima că $f(-1)$, adică $a - 5$, este egal cu zero cînd $a = 5$, negativ cînd $a < 5$, și pozitiv cînd $a > 5$.

În mod analog se completează celelalte coloane ale părții de la mijloc.

În partea a treia a tabloului se scriu concluziile. Fiecare rînd conține semnele șirului lui Rolle pentru cazul respectiv. În rîndul întîi, care corespunde cazului $a < 0$, apar două variații, cînd x trece de la $-\infty$ la -1 și de la 2 la ∞, la concluzii se scrie* că ecuația are cîte o rădăcină reală în intervalele $(-\infty, -1)$ și $(2, \infty)$. În rîndul al doilea apare un zero în linia care corespunde cazului $a = 0$. Aceasta înseamă că, dacă $a = 0$, valoarea $x = 0$, care este o rădăcină a derivatei, anulează și funcția, deci 0 este rădăcină multiplă de ordin $\geqslant 2$. Afară de aceasta, apare cîte o variație cînd x trece de la $-\infty$ la -1 și de la 2 la $+\infty$, ceea ce înseamnă că ecuația are cîte o rădăcină reală în intervalele $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$. Aceste lucruri se înscriu la concluzii ș.a.m.d.

În cazul $a = 0$, ecuația este $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$. Ea are în adevăr rădăcina dublă $x = 0$. Celelalte rădăcini sînt $x_3 = \frac{2(1-\sqrt{10})}{3} = -1{,}44\ldots$, $x_4 = \frac{2(1+\sqrt{10})}{3} = 2{,}84\ldots$, ele se găsesc în adevăr în intervalele prevăzute.

În cazul $a = 5$, ecuația este $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0$. Se împarte (Horner) prin $(x+1)^2$ și rămîne de rezolvat ecuația $3x^2 - 10x + 5 = 0$. La fel se procedează pentru $a = 32$.

4.2.6. **Cazul cînd se cere ca rădăcinile să fie într-un interval dat.** Reluăm exemplul precedent,

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0,$$

dar punem condiția ca rădăcinile să fie cuprinse în intervalul $[-2, 3]$.

În locul funcției f definită pe R, ne interesează acum restricția ei pe intervalul $[-2, 3]$. Șirul lui Rolle este acum,

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	$a+32$	$a-5$	a	$a-32$	$a+27$

* v. nota de la 4.1.7.

Rezultatul discuției este redat în tabloul următor:

a	-2	-1	0	2	3	concluzii
	$a+32$	$a-5$	a	$a-32$	$a+27$	
$a < -32$	−	−	−	−	−	nici o rădăcină
$a = -32$	0	−	−	−	−	$x = -2$
$-32 < a < -27$	+	−	−	−	−	$(-2, -1)$
$a = -27$	+	−	−	−	0	$x_1 = 3$, $(-2, -1)$
$-27 < a < 0$	+	−	−	−	+	$(-2, -1)$, $(2, 3)$
$a = 0$	+	−	0	−	+	$x_1 = x_2 = 0$, $(-2, -1)$, $(2, 3)$
$0 < a < 5$	+	−	+	−	+	$(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$
$a = 5$	+	0	+	−	+	$x_1 = x_2 = -1$, $(0, 2)$, $(2, 3)$
$5 < a < 32$	+	+	+	−	+	$(0, 2)$, $(2, 3)$
$a = 32$	+	+	+	0	+	$x_1 = x_2 = 2$
$a > 32$	+	+	+	+	+	nici o rădăcină

4.3. Aproximarea rădăcinilor reale ale unei ecuații

4.3.1. **Introducere.** Dacă avem de rezolvat o ecuație $f(x) = 0$ — vom presupune funcția f derivabilă pe intervalul considerat, deși această condiție nu este totdeauna necesară — și am separat rădăcinile ei, se pune problema de a le afla efectiv. De cele mai multe ori ele sînt iraționale, și trebuie aflată cîte o valoare aproximativă a fiecăreia, sub forma de fracție zecimală.

Fie x_1 o rădăcină a unei ecuații și x_1' o valoare aproximativă a ei. Dacă $x_1' < x_1$, se spune că x_1' este o valoare aproximativă *prin lipsă*, iar dacă $x_1' > x_1$ se spune că x_1' este o valoare aproximativ prin *adaos* sau prin *exces*. Este important să știm și cît de mult diferă valoarea aflată de cea adevărată, adică să cunoaștem o limită superioară a erorii. Dacă știm că un număr x este cuprins între două numere a și b, $a < x < b$, se ia pentru x valoarea aproximativă $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Atunci eroarea este sigur mai mică decît $x_1 - a$ și decît $b - x_1$. De exemplu, dacă se știe că $5{,}473 < x < 5{,}479$, se ia $x \approx x_1 = 5{,}476$; atunci eroarea este sigur mai mică decît $5{,}476 - 5{,}743 = 5{,}479 - 5{,}476 = 0{,}003$ și se scrie:

$$x = 5{,}476\ (\pm\ 0{,}003).$$

Dacă media are o zecimală mai mult decît numerele a și b, ea se rotunjește. De exemplu, dacă se știe că x este cuprins între $a = 2{,}34$ și $b = 2{,}39$, deci $\frac{a+b}{2} = 2{,}365$ se ia $x_1 = 2{,}37$. În acest caz avem: $2{,}37 - 2{,}34 = 0{,}03$; $2{,}39 - 2{,}37 = 0{,}02$; pentru siguranță, se consideră că eroarea este mai mică decît 0,03 și se scrie

$$x = 2{,}37 \ (\pm\, 0{,}03).$$

4.3.2. **Fracționarea intervalelor.** Să presupunem că am găsit două numere întregi consecutive, a și $a + 1$ între care se găsește o singură rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ și

$$f(a) < 0, \ f(a+1) > 0$$

de exemplu $f(2) < 0$, $f(3) > 0$. Aceste numere reprezintă deja cîte o valoare aproximativă a rădăcinii. Pentru a avea o aproximare mai bună, se încearcă

$$2{,}1 \quad 2{,}2 \quad 2{,}3 \ \ldots \ 2{,}9$$

pînă ce se obțin două valori consecutive ale lui x din acest șir pentru care funcția f are valori de semne contrare, de exemplu

$$f(2,\ 3) < 0, \ f(2,\ 4) > 0.$$

Bineînțeles nu este necesar să se meargă din zecime în zecime. Se poate începe cu 2,5 dacă $f(2,\ 5) > 0$, înseamnă că rădăcina se găsește între 2 și 2,5. Acum se încearcă 2,3 ș.a.m.d.

După ce s-a găsit prima zecimală, de exemplu s-a aflat că rădăcina se află între 2,3 și 2,4, procedeul se poate repeta: se calculează valorile funcției pentru

$$2{,}31 \quad 2{,}32 \quad 2{,}33 \ \ldots \ 2{,}39$$

ș.a.m.d.

Acest procedeu se numește *fracționarea intervalelor.*

4.3.3. **Exemplu.** Considerăm ecuația

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0.$$

Trasînd curba $y = x^3 - 2x - 9$, sau prin șirul lui Rolle, se stabilește că ecuația are o singură rădăcină reală, în intervalul $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$. Apoi,

$$f(1) = -10, \ f(2) = -5, \ f(3) = 12.$$

Deoarece $f(2)$ și $f(3)$ sînt de semne contrare, rădăcina se află în intervalul (2, 3). Urmează să fracționăm acest interval. Calculăm întîi $f(2{,}5)$,

obținem $f(2{,}5) = 1{,}625 > 0$, deci rădăcina se găsește în intervalul (2; 2,5). Acum calculăm pe rînd:

$$f(2{,}4) = 0{,}024, \qquad f(2{,}3) = -1{,}433.$$

Deoarece aceste două rezultate sînt de semne contrare, rădăcina se găsește în intervalul (2,3; 2,4).

Am putea continua, fracționînd intervalul (2,30, 2,40) ș.a.m.d.

Fracționarea intervalelor este un procedeu foarte simplu, dar foarte greoi. Există mai multe metode prin care se pot afla rapid și cu mare precizie rădăcinile unei ecuații, din care vom expune două.

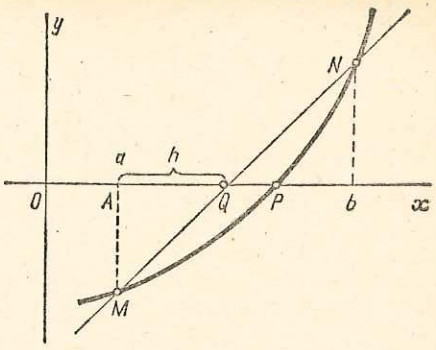

Fig. 18.

4.3.4. **Metoda coardei.** Considerăm o ecuație

$$f(x) = 0,$$

unde f este o funcție derivabilă într-un interval I.

Presupunem că am stabilit printr-un mijloc oarecare că ea are o singură rădăcină în intervalul (a, b) unde $a, b \in I$ și că $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Graficul funcției f va avea în intervalul (a, b) forma din figura 18, în sensul că punctul $M(a, f(a))$, se găsește sub axa Ox, iar punctul $N(b, f(b))$ deasupra ei. Rădăcina pe care o căutăm este abscisa punctului P în care graficul taie axa Ox, abscisă pe care nu o cunoaștem.

Metoda coardei constă în faptul următor: *se ia ca valoare aproximativă a rădăcinii abscisa punctului Q în care coarda MN taie axa Ox.* Se poate spune că arcul de curbă MPN se înlocuiește cu coarda MN.

Pentru a calcula abscisa punctului Q nu avem decît să scriem ecuația dreptei care trece prin punctele M și N, și să determinăm abscisa punctului ei de intersecție cu axa Ox.

Ecuația dreptei este

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{1}$$

Punem $y = 0$ și rămîne să aflăm x din ecuația

$$-f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Este, însă, mai simplu să aflăm numărul $x - a$, care este măsura algebrică a vectorului $\overrightarrow{AQ}$:

$$h = x - a = -\frac{(b - a)\, f(a)}{f(b) - f(a)} \tag{2}$$

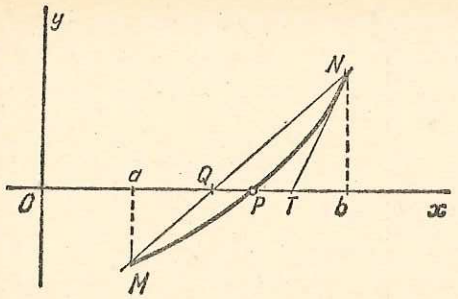

Fig. 19.

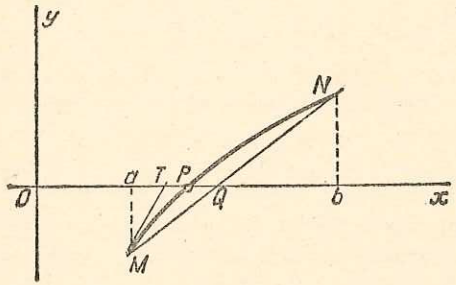

Fig. 20.

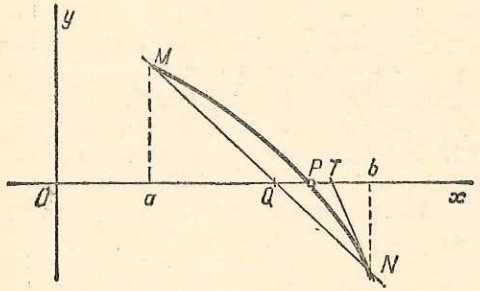

Fig. 21.

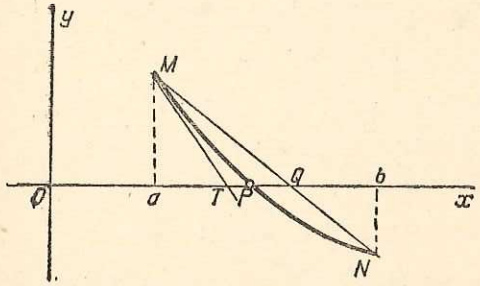

Fig. 22.

Valoarea rădăcinii va fi $x = a + h$. Numărul h, care se adună cu a pentru a obține o aproximare mai bună se numește *corectură*.

Sensul erorii se poate determina cu ajutorul graficului funcției. Intervalul (a, b) se ia destul de mic, astfel încît derivata a doua $f''(x)$ să păstreze același semn cînd x variază de la a la b, deci curba să fie în intervalul (a, b) sau tot timpul convexă, sau tot timpul concavă. Figurile 19—22 arată toate cazurile posibile. În fiecare figură, abscisa punctului P este valoarea exactă a rădăcinii, iar abscisa punctului Q este valoarea dată de metoda coardei. În cazul figurilor 19 și 21 ($f'(x) > 0, f''(x) > 0$ respectiv $f'(x) < 0, f''(x) < 0$) punctul Q este la stînga punctului P, deci metoda coardei dă o valoare aproximativă prin lipsă, în cazul figurilor 20 și 22 ($f'(x) > 0, f''(x) < 0$ respectiv $f'(x) < 0, f''(x) > 0$) se obține o valoare aproximativă prin adaos.

4.3.5. **Exemplu.** Reluăm ecuația (4.3.3).

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0.$$

Știm că ea are o rădăcină în intervalul (2,3; 2,4). Aplicăm formula (2). Avem:

$$a = 2{,}3, \quad b = 2{,}4,$$

$$b - a = 0{,}1,$$

$$f(a) = f(2{,}3) = -1{,}433,$$

$$f(b) = f(2{,}4) = 0{,}024.$$

Deci,

$$h = -\frac{0{,}1 \cdot (-1{,}433)}{0{,}024 - (-1{,}433)} = \frac{0{,}1433}{1{,}457} = 0{,}0983...$$

O valoare aproximativă a rădăcinii este

$$x = a + h = 2{,}3 + 0{,}0983... = 2{,}3983...$$

Pentru a cunoaște sensul erorii, calculăm derivatele:

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x.$$

În intervalul (2,3; 2,4) ambele derivate sînt pozitive, graficul are forma din figura 19. Valoarea aflată este aproximativă prin lipsă. Nu putem evalua limita erorii.

4.3.6. **Observări.** 1) Relația (1) se mai scrie

$$y = f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1')$$

sau, dacă expresia din dreapta se ordonează în raport cu x,

$$y = f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Deci $f_1(x)$ este un polinom de gradul I (liniar). Înlocuind în (1') x prin a și prin b, se obține

$$f_1(a) = f(a), \qquad f_1(b) = f(b)$$

adică polinomul f_1 ia în a și b aceleași valori ca funcția f. Se spune că $f_1(x)$ este un polinom de interpolare liniar, iar metoda coardei se mai numește metoda interpolării liniare. În loc de a rezolva ecuația $f(x) = 0$, se rezolvă ecuația $f_1(x) = 0$ (în practică se calculează $x - a = h$, nu x).

În cazul ecuației precedente (4.3.5), polinomul de interpolare este

$$f_1(x) = -1{,}433 + 14{,}57\ (x - 2{,}3).$$

Pentru aflarea rădăcinii, polinomul $f(x) = x^3 - 2x - 9$ a fost înlocuit cu acest polinom.

2) Polinomul de gradul I $f_1(x)$ se poate determina independent de considerațiile geometrice. Fiind dată o ecuație oarecare $f(x) = 0$, se consideră un polinom de gradul I cu coeficienți nedeterminați,

$$f_1(x) = mx + n$$

și se pun condițiile $f_1(a) = f(a)$, $f_1(b) = f(b)$, adică

$$ma + n = f(a), \qquad mb + n = f(b).$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu m și n (determinantul sistemului este $a - b \neq 0$) se obține pentru $f_1(x)$ expresia din (1').

Tot prin aceeași metodă, a coeficienților nedeterminați, se poate construi un polinom de interpolare de gradul II, al unei funcții date f, adică un polinom $f_2(x) = mx^2 + nx + p$ care ia în trei puncte date aceeași valoare ca funcția f. În mod asemănător se definește polinomul de interpolare de gradul III, IV, ... Aceste polinoame aproximează din ce în ce mai bine funcția f.

3) Interpolarea care se face cînd se folosesc table, de exemplu tablele de logaritmi, este tot liniară. Acolo se procedează astfel:

Fie a și b două numere ai căror logaritmi se găsesc în tablă, iar x un număr cuprins între a și b al cărui logaritm se caută. Se aplică procedeul numit „regula de trei".

$$\begin{array}{l} b-a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \log b - \log a \\ x-a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad h \end{array}$$

$$\frac{b-a}{x-a} = \frac{\log b - \log a}{h}, \text{ de unde } h = \frac{\log b - \log a}{b-a}(x-a)$$

și se ia

$$\log x = \log a + h = \log a + \frac{\log b - \log a}{b-a}(x-a) \qquad (1'')$$

„Judecata" este următoarea:

Dacă numărul crește de la a la b, logaritmul crește de la $\log a$ la $\log b$; dacă numărul crește de la a la x, logaritmul va crește cu un număr necunoscut h. Numărul h se află considerînd creșterile funcției logaritmice proporționale cu creșterile argumentului. Aceasta revine la a înlocui $\log x$ prin polinomul din (1'). În adevăr, în cazul cînd $f(x) = \log x$, relația (1') devine (1'').

4.3.7. **Metoda tangentei.** Fie

$$f(x) = 0$$

o ecuație care admite o singură rădăcină în intervalul (a, b). Presupunem că funcția f este derivabilă în intervalul $[a, b]$. Ducem în punctul M (fig. 23) tangenta la curba $y = f(x)$. Punctul T în care tangenta taie axa Ox ne dă o valoare aproximativă a rădăcinii.

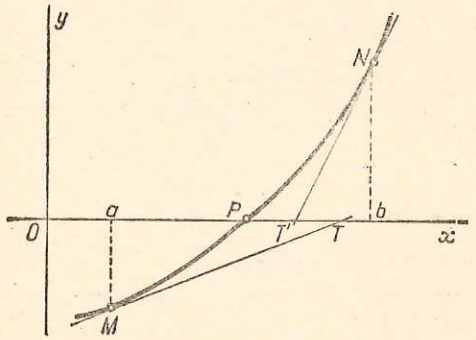

Fig. 23

Pentru a calcula abscisa punctului T, scriem ecuația tangentei la curbă în punctul M $(a, f(a))$. Coeficientul ei unghiular este $f'(a)$, deci ecuația este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Punem aici $y = 0$ și obținem

$$h = x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Numărul $h = x - a$ este măsura algebrică a vectorului $\overrightarrow{AT}$, el reprezintă corectura care trebuie adăugată la a pentru a obține o valoare aproximativă a rădăcinii.

Se poate duce tangenta în punctul $N(b, f(b))$. Ecuația ei este

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Pentru $y = 0$ ea ne dă corectura

$$k = x - b = -\frac{f(b)}{f'(b)}$$

care trebuie adunată cu b pentru a obține abscisa punctului T'. Valoarea astfel obținută este de asemenea o valoare aproximativă a rădăcinii. Pentru a ști care din cele două tangente dă un rezultat mai bun, se poate folosi graficul funcției: se duc tangentele în M și N la grafic și se alege tangenta care taie axa Ox într-un punct mai apropiat de P.

Ca și la metoda coardei, sensul erorii este dat de forma curbei (v. fig. 19—22). În cazul figurii 23, ambele valori sînt aproximative prin adaos.

Această metodă se numește și *metoda lui Newton.*

4.3.8. **Exemplu.** Reluăm ecuația

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0$$

care are o singură rădăcină în intervalul (2, 3; 2, 4). Avem:

$$a = 2{,}3 \quad f(a) = -1{,}433, \; f'(x) = 3x^2 - 2, \; f'(2{,}3) = 13{,}87,$$

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{-1{,}433}{13{,}87} = 0{,}103...$$

deci

$$x_1 = 2{,}3 + 0{,}103 = 2{,}403.$$

Pentru tangenta în punctul N, avem:

$$b = 2{,}4, \; f(b) = 0{,}024, \; f'(b) = 15{,}28,$$

$$k = -\frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{0{,}024}{15{,}28} = -0{,}0015...$$

deci

$$x_2 = 2{,}4 - 0{,}0015 = 2{,}3985.$$

Această valoare este mai bună.

4.3.9. **Folosirea simultană a ambelor metode.** Figurile 19—22 arată că punctele Q și T se găsesc de o parte și de alta a punctului P. Aceasta înseamnă că dacă una dintre cele două metode dă o valoare

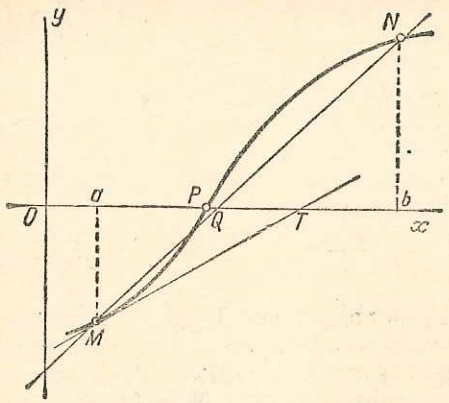

Fig. 24

aproximativă a rădăcinii prin lipsă, cealaltă dă o valoare aproximativă prin adaos. Acest fapt ne permite să ne dăm seama de precizia rezultatului.

Astfel, în cazul ecuației din exemplul tratat aici, metoda coardei și metoda tangentei au dat rezultatele

$$x = 2{,}3983... \text{ și } x = 2{,}3985,$$

primul prin lipsă, iar al doilea prin adaos. Deci, rădăcina se găsește între aceste două numere. Rezultatul este

$$x = 2{,}3984\,(\pm\, 0{,}0001).$$

Subliniem că aproximările date de metoda coardei și metoda lui Newton sînt de sens contrar numai cîtă vreme derivata a doua își păstrează semnul în intervalul (a, b). Situația nu mai este aceeași dacă curba are un punct de inflexiune în intervalul (a, b). Astfel, în cazul figurii 24 punctele Q și T sînt de aceeași parte a punctului P. Ambele metode dau valori aproximative prin adaos.

4.3.10. **Aplicarea repetată a celor două metode.** Cele două valori aproximative, una prin lipsă și cealaltă prin adaos, ne arată că rădăcina se află într-un interval mai mic (a', b'). Putem aplica din nou cele două metode și să găsim un nou interval (a'', b'') ș.a.m.d. Procedeul se poate repeta de cîte ori vrem, obținîndu-se o precizie din ce în ce mai mare.

Vom face acest lucru în cazul ecuației

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0.$$

Am aflat că rădăcina ei este cuprinsă între 2,3983 și 2,3985. Zecimala a patra se determină printr-un singur sondaj, calculînd valoarea polinomului pentru $x = 2{,}3984$. Se obține

$$f(2{,}3984) = -\,0{,}000429572096 < 0,$$

deci rădăcina se găsește în intervalul (2,3984; 2,3985).

Aplicăm metoda coardei.

$$a = 2{,}3984, \qquad f(a) = -0{,}000429572096,$$

$$b = 2{,}3985, \qquad f(b) = 0{,}001096196625,$$

corectura este

$$h = -\,\frac{0{,}0001 \cdot (-0{,}000429572096)}{0{,}001525768721} = 0{,}00002815446...,$$

deci

$$x_c = 2{,}39842815446 \text{ (prin lipsă)}.$$

Aplicăm metoda tangentei, și anume luăm tangenta în punctul de abscisă $b = 2{,}3985$, căci s-a văzut (4.3.10) că dă un rezultat mai bun.

$$f'(x) = 3x^2 - 2,\ f'(b) = 15{,}25840675.$$

Corectura este

$$k = -\,\frac{0{,}001096196625}{15{,}25840675} = -\,0{,}0000718421...,$$

deci

$$x_t = 2{,}3985 - 0{,}0000718421 = 2{,}3984281579 \text{ (prin adaos)}.$$

Cele două rezultate au 8 zecimale comune. Rotunjindu-le la 9 cifre, cifra a 9-a din x_c și x_t este, respectiv 4 și 7, deci luînd media, $x = 2{,}398428156\left(\pm\,\frac{2}{10^9}\right)$.

Exerciții

Separarea rădăcinilor

1. Se consideră ecuația

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$$

în care m este variabil. Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor care se obțin dînd lui m pe rînd valorile următoare:

a) $m = 8$; b) $m = -6$; c) $m = 30$; d) $m = 27$.

2. Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $x^3 - 4x^2 + 7x - 12 = 0$; b) $3x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 15 = 0$;
c) $x^5 - 5x^3 - 50x + 120 = 0$; d) $x^5 - 5x^3 - 50x + 10 = 0$;
e) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 20 = 0$;
f) $3x^5 - 15x^4 - 35x^3 + 255x^2 - 360x + 160 = 0$;
g) $3x^4 + 8x^3 - 78x^2 + 120x - 53 = 0$;
h) $2x^3 - 63x^2 - 774x - 120 = 0$.

3. Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $\sqrt{x^2 - 2x} = 9 - x^2$; b) $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{x}{2} + 1$; c) $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4} = 3 - x^2$;
d) $|x^4 - 1| = x + 2$.

4. Să se separe prin metoda grafică rădăcinile ecuațiilor următoare:

a) $2^x = 3x^2$; b) $2^x = x^3$; c) $e^x = \cos x$; d) $\sin x = x^2$; e) $\sin x - x + 1 = 0$;
f) $\log x + x = 0$; g) $\log x = \sin x$; h) $\operatorname{tg} x + x - 1 = 0$.

5. Să se separe soluțiile reale ale sistemelor:

a) $x^2y + y = 2,\ x + y = 1$;
b) $x^2y + y - x = 0,\ x^2 + y^2 = 1$;
c) $x + y + z = 0,\ xy + yz + zx = -12,\ xyz = -7$.

6. Să se discute în raport cu parametrul a rădăcinile reale ale ecuațiilor următoare*:

a) $x^3 - 6x^2 - 15x + a = 0$; b) $x^4 - 2x^2 + a = 0$; c) $x - \sqrt{x} + a = 0$.

7. Să se discute în raport cu parametrul a rădăcinile reale ale ecuațiilor următoare:

a) $ax^2 + (a - 3)(x + 1) = 0$; b) $ax^3 - x - a = 0$;
c) $x^3 - ax + 1 = 0$; d) $ax^3 - 3(a + 1)x + 2(a + 1) = 0$.

8. Să se discute în raport cu parametrul m rădăcinile reale ale ecuațiilor următoare:

a) $e^x = x + m$; b) $\ln x = x + m$; c) $\sin x = x + m$; d) $\sin x = 2x + m$;
e) $3^x = mx^2$; f) $\operatorname{tg} x = mx$; g) $\ln x = mx$; h) $\operatorname{arc\,tg} x = mx$; i) $\arcsin x = x + m$.

9. Se dă ecuația

$$(a - 1)x^2 - 2(3a - 1)x + 8a - 1 = 0.$$

Să se discute în raport cu parametrul a numărul rădăcinilor sale reale situate în intervalul:

a) $[-1, 1]$; b) $[0, 2]$; c) $[3, 5]$.

10. Aceeași problemă în cazul ecuației

$$\sin x + \cos x = a,$$

intervalele fiind:

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; b) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; c) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$; d) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

11. Aceeași problemă în cazul ecuației

$$5x^3 - a(5x^2 - 2x - 3) = 0,$$

intervalele fiind:

a) $(-\infty, 0]$; b) $[-1, 1]$; c) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right]$.

12. Să se discute cu ajutorul șirului lui Rolle rădăcinile reale ale ecuației $x^3 + px + q = 0$, $(p, q \in R)$.

* La problemele care conțin parametri se va folosi de preferință metoda grafică.

13*. a) Să se înscrie într-o sferă cu raza de R cm un con al cărui volum să fie de πV cm³. Discuție în raport cu V.

b) Aceeași problemă dacă se pune condiția ca centrul sferei să fie în interiorul conului.

c) Să se rezolve efectiv ecuația în cazul $V = \frac{25R^3}{64}$. *

14. a) Să se înscrie într-un cerc cu raza de R cm un triunghi isoscel a cărui arie să fie de S cm². Discuție.

b) Să se rezolve efectiv ecuația problemei în cazul $S = R^2$.

15. Într-o elipsă $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ se duce o coardă MM' paralelă la axa Ox și capetele ei, M și M' se unesc cu punctul $B(0, b)$. Să se determine poziția acestei corzi astfel încît aria triunghiului BMM' să fie egală cu un număr dat S. Discuție. Ce legătură există între această problemă și cea precedentă.

16. a) Să se înscrie într-un con cu raza de R cm și înălțimea de h cm un cilindru al cărui volum să fie de πV cm³. Discuție.

b) Să se rezolve efectiv ecuația în cazul $V = \frac{2R^2h}{27}$.

17. a) Generatoarea unui con circular drept este de a cm, volumul său este de πV cm³. Să se afle raza și înălțimea conului. Discuție.

b) Caz particular: $V = \frac{a^3}{8}$.

18. Aria laterală a unui cort conic este de πS m², volumul său este de πV m³. Să se determine raza și generatoarea conului. Discuție.

19. a) Să se determine dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu baza pătrată știind că aria sa totală este de S cm², iar volumul de V cm³. Discuție.

b) Să se rezolve problema pînă la capăt în cazul cînd $S = \frac{17\sqrt[3]{V^2}}{2}$.

20. a) Aria totală și volumul unui clindru circular drept sînt, respectiv, de πS cm² și πV cm³. Să se afle raza și înălțimea cilindrului. Discuție.

b) Să se rezolve problema pînă la capăt în cazul cînd $V = \frac{7S\sqrt{S}}{54}$.

Aproximarea rădăcinilor

21. Să se separe rădăcinile ecuațiilor următoare și să se calculeze cea care se află în intervalul indicat. Prima zecimală se va determina prin fracționarea intervalelor, apoi se vor aplica metoda coardei și metoda tangentei.
a) $x^3 - 5x - 3 = 0$, $(2; 3)$; b) $x^3 - 2x - 5 = 0$**, $(2; 3)$;
c) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, $(0, 1)$.

* Problemele 13—20 se consideră rezolvate dacă se formează ecuația și se separă rădăcinile ei reale.

** Exemplu tratat de Newton însuși.

22. Să se rezolve ecuațiile următoare. Rădăcinile se vor separa prin metoda grafică, apoi se va proceda prin fracționarea intervalelor (4.3.2), pînă cînd se va obține un interval a cărui lungime este mai mică decît 1 (la primele două exerciții) sau decît 0,1 (la ultimele două).

a) $\lg x = \sin x$; b) $x = \cos x$; c) $x^x = 3$; d) $3^x = x + 2$.

23. Perimetrul unui dreptunghi este de 12 cm. Volumul corpului născut prin rotirea dreptunghiului în jurul unei laturi este de 10π cm^3. Se cer laturile dreptunghiului.

24. Într-un triunghi dreptunghic, diferența dintre ipotenuză și o catetă este de 5 m, aria triunghiului este de 4 cm^2. Se cere o catetă a triunghiului.

25. *(Problema lui Arhimede).* Să se taie o sferă cu un plan astfel încît volumul părții din sferă situată de o parte a planului să fie a n-a parte din volumul sferei.

Cazuri particulare: a) $n = 3$ (împărțirea unei sfere în trei părți echivalente); b) $n = 4$ (împărțirea unei emisfere în două părți echivalente).

26. Pînă la ce adîncime se scufundă în apă o sferă făcută dintr-un material cu densitatea $\rho = 0{,}7$.

27. Să se ducă într-un semicerc printr-un capăt al diametrului o coardă care să împartă semicercul în două părți echivalente (de aceeași arie).

28. Să se ducă într-un semicerc o coardă paralelă cu diametrul care să împartă semicercul în două părți echivalente (de aceeași arie).

29. Să se ducă într-un cerc o coardă AB astfel încît lungimea arcului AB să fie dublul distanței de la centrul cercului la coardă.

30. Să se ducă într-un cerc o coardă AB astfel încît lungimea arcului AB să fie dublul lungimii corzii AB.

31. Se consideră un cerc cu diametrul AB și tangenta în punctul B. Prin punctul A se duce o semidreaptă și se notează cu C și D respectiv punctele ei de intersecție cu semicercul și cu tangenta în B. Să se determine unghiul $CAB = x$ astfel încît lungimea segmentului BD să fie dublul lungimii arcului BC.

32. Se consideră un triunghi dreptunghic OAB ($\hat{A} = 90°$). Se duce un arc de cerc cu centrul în O și cu raza OA, și se notează cu C punctul lui de intersecție cu OB. Să se determine unghiul O astfel încît aria sectorului OAC să fie jumătate din aria triunghiului OAB.

Structuri algebrice

5.1. Legi de compoziție interne

5.1.1. Introducere. Matematica, din cele mai vechi timpuri, s-a dezvoltat în strînsă legătură cu ideea de calcul. Documentele cele mai vechi, rămase de la egipteni și babilonieni, dovedesc că aceștia erau în posesia unui sistem complet de reguli de calcul privind numerele întregi pozitive, numerele raționale pozitive, lungimile, ariile, volumele, ecuațiile de gradul întîi și doi. Aceste reguli, date fără nici o justificare, erau enunțate în cazuri particulare, numerice, dar nu lăsau nici o îndoială asupra generalității lor. În această etapă regulile de calcul aveau menirea de a oferi un mijloc de a afla rezultatul unui calcul, în care intervin operațiile aritmetice uzuale cu numere date efectiv. Primele enunțuri cu caracter general și încercări de justificare ale regulilor de calcul se întîlnesc la greci (Euclid, Diophante). Apariția algebrei, caracterizată prin introducerea notației cu litere a elementelor care intervin în probleme, a permis enunțarea unor reguli generale de calcul (referitoare la numere pozitive și negative, precum și la unele mărimi numerice — lungimi, arii, volume). În această nouă etapă se fac tot calcule cu numere, dar operațiile aritmetice uzuale se aplică și unor numere neprecizate efectiv, notate cu litere.

Perfecționarea continuă a notațiilor matematice (notațiile folosite azi le datorăm aproape în întregime matematicienilor Viète, sec. XVI și Descartes, sec. XVII), precum și apariția unor noțiuni noi de natură foarte variată (polinoame, vectori, permutări, matrice etc.), cu care se calculează după reguli analoage regulilor de la numere, au determinat pe matematicieni să reflecteze asupra principiilor generale care stau la baza calculului, indiferent că acesta se face cu numere sau cu alte elemente. Apare necesitatea de a se face un studiu al operațiilor în general, fără a se ține seama de natura obiectelor cu care se operează, astfel încît rezultatele obținute să fie aplicabile și în cazul operațiilor uzuale cunoscute în mulțimi concrete.

În rezumat, evoluția noțiunii de operație a trecut prin următoarele faze:

1) operații determinate cu elemente determinate (numere) — obiectul aritmeticii;

2) operații determinate cu elemente determinate și nedeterminate (numere) — obiectul algebrei elementare;

3) operații nedeterminate cu elemente nedeterminate — obiect al algebrei abstracte.

În acest manual vom face un studiu al operațiilor în general, subliniind acele proprietăți care permit pe de-o parte să justificăm dintr-un punct de vedere unitar unele reguli ale algebrei elementare, iar pe de altă parte să aplicăm aceste reguli, sau numai o parte dintre ele, și în cazul unor mulțimi ale căror elemente nu sînt numere.

5.1.2. Pentru a face un calcul, cu notațiile și convențiile folosite în zilele noastre, se operează succesiv cu două elemente scrise alăturat în textul respectiv și considerate de la „stînga la dreapta", ordinea în care se calculează fiind indicată de paranteze. Parantezele se pun astfel încît, la fiecare etapă a calculului, să se opereze cu două elemente scrise alăturat. Sînt cazuri cînd pe baza unor convenții parantezele se omit.

Să ne referim acum la operațiile aritmetice cu numere naturale.

Adunarea, în mulțimea N a numerelor naturale, asociază, în mod unic, oricărui cuplu (x, y) de numere naturale, numărul natural $x + y$.

Mulțimea cuplelor (x, y), unde $x \in N$, $y \in N$ este produsul cartezian $N \times N$. Corespondența $(x, y) \to x + y$ determină o funcție definită pe $N \times N$ cu valori în N. *Așadar, adunarea în N este o funcție definită pe mulțimea $N \times N$ cu valori în N.*

Înmulțirea, în mulțimea N asociază (în mod unic) oricărui cuplu (x, y) de numere naturale, numărul natural $x \cdot y$.

Înmulțirea în N este o funcție definită pe produsul cartezian $N \times N$ cu valori în N.

Scăderea, în mulțimea N a numerelor naturale, asociază (în mod unic) numai la anumite cuple (x, y) de numere naturale (cele în care $x > y$), un număr natural, notat $x - y$.

Mulțimea cuplelor (x, y) de numere naturale, în care $x > y$ constituie o parte a produsului cartezian $N \times N$.

Corespondența $(x, y) \to x - y$ determină o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N.

Așadar, scăderea în N este o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N.

Împărțirea în N asociază numai la anumite cuple (x, y) de numere naturale (cele în care x este multiplu de y) un număr natural notat $x : y$.

Mulțimea cuplelor (x, y), unde $x \in N$, $y \in N$ și x este multiplu de y este o parte a produsului cartezian $N \times N$. *Așadar, împărțirea în mulțimea N a numerelor naturale este o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N.*

La toate operațiile, în mulțimea N, cercetate mai înainte s-a observat o caracteristică comună: existența unei reguli pe baza căreia la orice cuplu sau la anumite cuple de numere din mulțimea considerată (mulțimea numerelor naturale) se poate asocia în mod unic un număr din aceeași mulțime. Cum $N \times N \subset N \times N$ ($N \times N$ este o parte a mulțimii $N \times N$), putem spune că *oricare dintre operațiile aritmetice studiate este o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N.* Mulțimea N n-a jucat un rol esențial în considerațiile anterioare. Dacă în loc de mulțimea N se consideră mulțimea Z a numerelor întregi, sau mulțimea Q a numerelor raționale, sau mulțimea R a numerelor reale, sau mulțimea C a numerelor complexe, oricare dintre cele patru operații aritmetice va fi considerată în mulțimea respectivă, ca o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $Z \times Z$, respectiv $Q \times Q$, $R \times R$, $C \times C$ cu valori în Z, respectiv Q, R, C.

Reținînd ce a fost esențial în operațiile aritmetice studiate mai înainte sîntem conduși, în mod natural, la o noțiune cu caracter general, aplicabilă și în mulțimi care nu sînt formate din numere, noțiunea de *lege de compoziție internă*, prin care se extinde noțiunea de operație aritmetică.

DEFINIȚIE. Se numește lege de compoziție internă între elementele unei mulțimi M, o aplicație f definită pe o parte a produsului cartezian $M \times M$ cu valori în M.

În loc de lege de compoziție internă se mai spune *operație algebrică internă*. O lege de compoziție între elementele unei mulțimi M se mai spune că este definită pe M.

Elementul corespunzător unui cuplu (x, y) prin funcția f se numește *compusul* lui x cu y și se notează scriind succesiv, x, un semn numit semnul legii de compoziție și y (semnul dintre x și y este același pentru toți compușii pentru o lege de compoziție dată). Compusul lui x cu y poate fi notat în diverse moduri, ca de exemplu: $x \top y$, $x \perp y$, $x * y$, $x \circ y$, $x \Delta y$.

Se poate întîmpla ca o lege de compoziție să prezinte unele analogii cu adunarea numerică și atunci se folosește pentru notarea compusului lui x cu y, tot semnul $x + y$. Elementul $x + y$ se va numi *suma* lui x cu y, iar elementele x și y se vor numi *termenii* sumei. Se spune în acest caz că legea de compoziție este notată *aditiv*. O lege de compoziție notată aditiv se va numi tot *adunare*.

Dacă legea de compoziție prezintă unele analogii cu înmulțirea numerică, atunci compusul dintre x și y se notează uneori cu $x \cdot y$ sau xy și se numește produsul lui x cu y, elementele x și y numindu-se *factorii* produsului. În acest caz se spune că legea de compoziție este notată *multiplicativ*. O lege de compoziție notată multiplicativ se va numi *înmulțire*.

Se spune lege de compoziție „internă", deoarece compusul a două elemente dintr-o mulțime dată este un element din aceeași mulțime. Algebra studiază în afară de legile de compoziție interne, și legi de compoziție externe, prin care se compun elementele unei mulțimi de bază cu elemente dintr-o mulțime auxiliară, obținîndu-se un element tot din mulțimea de bază (exemplu: înmulțirea vectorilor cu numere reale este o lege de compoziție externă prin care la orice cuplu $(\alpha, \vec{v})$ format din numărul real α și vectorul $\vec{v}$ îi corespunde vectorul $\alpha\vec{v}$).

Dacă legea de compoziție considerată într-o mulțime M face să corespundă la orice cuplu (x, y) din mulțimea respectivă un element din aceeași mulțime (funcția corespunzătoare este definită pe produsul cartezian $M \times M$), se spune că legea de compoziție *este peste tot definită. O lege de compoziție internă peste tot definită asociază la orice cuplu de elemente din M un element și numai unul din M.* În cazul cînd există cel puțin un cuplu (x, y) de elemente din mulțimea considerată căruia nu-i corespunde, prin legea de compoziție dată, nici un element (din aceeași mulțime), legea de compoziție *nu este peste tot definită.* (În acest caz se presupune, evident, că este definit cel puțin un compus.)

Cele mai frecvente legi de compoziție studiate în acest manual vor fi legile de compoziție peste tot definite. Vom întîlni des cazuri cînd legea de compoziție este astfel dată, încît nu este evident că ea este peste tot definită. În aceste cazuri, *pentru a demonstra că legea este peste tot definită, trebuie să verificăm că oricare ar fi x și y din mulțimea considerată, compusul lui x cu y este un element din aceeași mulțime.*

Exemple:

5.1.3. *Operațiile aritmetice*, considerate pe diverse mulțimi de numere, sînt legi de compoziție interne.

5.1.4. *O lege de compoziție definită pe mulțimea* $\{a, b, c\}$.

În unele cazuri vom defini legile de compoziție cu ajutorul unui tabel format din linii și coloane. De exemplu, în tabelul (1), este dată o lege de compoziție definită pe mulțimea $\{a, b, c\}$, și notată cu semnul $\top$ (semnul legii de compoziție se trece în colțul din stînga)

$\top$	a	b	c
a	a	b	a
b	c	a	b
c	b	b	b

Tabelul 1

Compusul unui element cu un alt element se citește la intersecția dintre linia primului element și coloana celui de-al doilea element.

Avem, de exemplu $a \top b = b$, $b \top a = c$, $a \top (b \top c) = a \top b = b$.

5.1.5. **Reuniunea, intersecția.** Fie $E = \{1, 2\}$. Mulțimea $\mathcal{P}(E)$ a părților lui E are ca elemente mulțimile:

$$\varnothing \text{ (mulțimea vidă)},$$
$$A = \{1\};\ B = \{2\},$$
$$E = \{1, 2\}.$$

Așadar, $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} = \{\varnothing, A, B, E\}$.

În mulțimea $\mathcal{P}(E)$, asociind oricărui cuplu (X, Y) de părți a lui E mulțimea $X \cup Y$ (tabelul 2), respectiv $X \cap Y$ (tabelul 3) definim două legi de compoziție peste tot definite.

$\cup$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	E
A	A	A	E	E
B	B	E	B	E
E	E	E	E	E

Tabelul 2

$\cap$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A
B	$\varnothing$	$\varnothing$	B	B
E	$\varnothing$	A	B	E

Tabelul 3

Procedînd analog, putem înzestra mulțimea $\mathcal{P}(E)$ a părților oricărei mulțimi E, cu două legi de compoziție peste tot definite, reuniunea, respectiv intersecția.

5.1.6. **Compunerea funcțiilor.** Fie E o mulțime și funcțiile $f : E \to E$ și $g : E \to E$. Asociind cuplurilor (g, f), funcția $g \circ f : E \to E$ definim o lege de compoziție peste tot definită în mulțimea funcțiilor definite pe E cu valori în E. Reamintim că funcția $g \circ f$ realizează corespondența $x \to g(f(x))$, adică $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ și că aceste funcții se reprezintă în diagrame ca cele din figurile 25 și 26 (săgețile punctate indică corespondența realizată de $g \circ f$).

În diagrama corespunzătoare compunerii $g \circ f$ se desenează întîi f și apoi g.

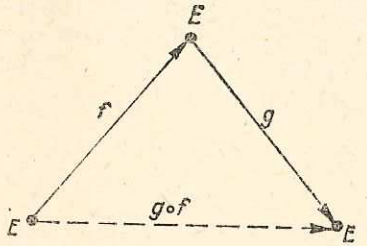

Fig. 25.

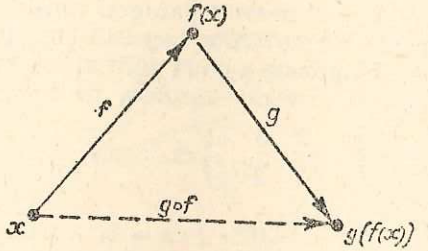

Fig. 26.

De exemplu, în mulțimea funcțiilor definite pe R cu valori în R să considerăm funcțiile:

$$f(x) = 3x + 2 \qquad (f : x \to 3x + 2)^*,$$
$$g(x) = x^2 + 5x \qquad (g : x \to x^2 + 5x).$$

Avem:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 2 = 3(x^2 + 5x) + 2 = 3x^2 + 15x + 2.$$
$$f \circ g : x \to 3x^2 + 15x + 2.$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 5f(x) = (3x + 2)^2 + 5(3x + 2) = 9x^2 + 27x + 14.$$
$$g \circ f : x \to 9x^2 + 27x + 14.$$

Se observă că: $f \circ g \neq g \circ f$.

5.1.7. **Compunerea permutărilor.** Reamintim că *se numește permutare asupra mulțimii* $E = \{1, 2, 3, ..., n\}$ *orice aplicație biunivocă* $\Pi : E \to E$ *(o aplicație cu proprietatea:* $i \neq j \Rightarrow \Pi(i) \neq \Pi(j)$).

O permutare asupra lui E care realizează corespondența $1 \to e_1$, $2 \to e_2$, ..., $n \to e_n$ se notează prin semnul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}.$$

Numerele $e_1, e_2, ..., e_n$ sînt numerele 1, 2, .., n, luate o singură dată eventual în altă ordine decît ordinea naturală. Întrucît în determinarea unei permutări nu interesează decît corespondența realizată de aceasta, putem scrie elementele din linia întîi în orice ordine, avînd însă grijă ca în linia a doua să scriem imaginile corespunzătoare elementelor scrise deasupra.

De pildă, pentru permutarea asupra mulțimii {1, 2, 3, 4} care realizează corespondența $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$, $4 \to 4$, putem folosi notațiile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Scopul acestui paragraf nu este de a studia în amănunțime compunerea permutărilor (această chestiune va fi reluată), ci de a da tehnica de compunere a două permutări asupra unei mulțimi. Pentru simplitatea expunerii vom considera permutările particulare.

$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, asupra mulțimii {1, 2, 3, 4}.

* Prin notația $f : x \to 3x + 2$ se exprimă faptul că funcția f face să corespundă elementului x, elementul $3x + 2$.

Ne propunem să determinăm permutarea $\Pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Avem, de exemplu, $(\Pi \circ \sigma)(4) = \Pi(\sigma(4)) = \Pi(3) = 2$.

Deci pentru a afla imaginea elementului 4 prin $\Pi \circ \sigma$, aflăm întîi imaginea $\sigma(4)$ a lui 4, prin σ, imagine care este 3, apoi imaginea lui $\sigma(4) = 3$, prin Π, imagine care este 2.

Avem:

$$\Pi \circ \sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\Pi} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se citește astfel:

1) lui 1 îi corespunde, prin σ, 2, lui 2 îi corespunde, prin Π, 1, deci lui 1 îi corespunde, prin $\Pi \circ \sigma$, 1.

2) lui 2 îi corespunde prin σ, 1, lui 1 îi corespunde, prin Π, 3, deci lui 2 îi corespunde, prin $\Pi \circ \sigma$, 3 etc.

5.1.8. **Adunarea vectorilor de poziție.** Mulțimea vectorilor situați într-un plan P care au aceeași origine O se numesc *vectori de poziție.* În această mulțime adunarea (care se face după regula paralelogramului — figura 27) este o lege de compoziție peste tot definită (suma a doi vectori de poziție este un vector de poziție). Suma dintre vectorul $\vec{v}_1$ și vectorul $\vec{v}_2$ se notează cu $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Ne-am referit numai la adunarea vectorilor care au aceeași origine. În cazul cînd vectorii nu au aceeași origine, adunarea se poate reduce la adunarea a doi vectori cu aceeași origine, considerîndu-se vectori echipolenți, cu originea comună.

5.1.9. **Transformări punctuale. Compunerea translațiilor și rotațiilor.** În acest paragraf vom înțelege prin transformare punctuală a planului P, o aplicație $f : P \to P$ (o transformare punctuală a planului P este o funcție care face ca oricărui punct din planul P să-i corespundă un punct și numai unul din același plan).

Compunerea a două transformări punctuale ale planului P este tot o transformare punctuală a planului P.

Aplicația identică a mulțimii P (funcția care face ca oricărui punct M din plan să-i corespundă tot M) este o transformare punctuală a planului P.

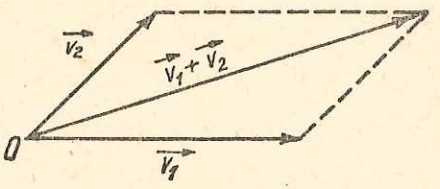

Fig. 27.

Se numește translație de vector $\vec{v}$ *o aplicație* $t_{\vec{v}} : P \to P$ *care face ca oricărui punct* M *(respectiv* N*) să-i*

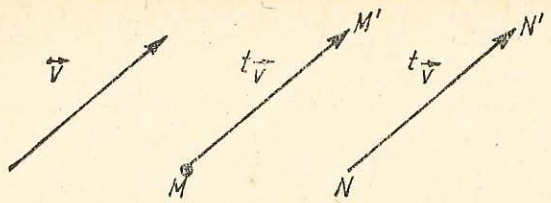

Fig. 28.

corespundă un punct M' (respectiv N'), astfel încît vectorul $\overrightarrow{MM'}$ *(respectiv* $\overrightarrow{NN'}$*) să fie echipolent cu* $\vec{v}$ (fig. 28).

Aplicația identică a planului P este translația de vector nul $(t_{\vec{0}})$.

Compunerea a două translații $t_{\vec{v}_1}$ și $t_{\vec{v}_2}$ este tot o translație. Vom justifica această afirmație urmărind diagrama din figura 29 (pentru compunerea $t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2}$ se desenează întîi $t_{\vec{v}_2}$ și apoi $t_{\vec{v}_1}$. Se observă că:

$$t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_2} + \vec{v}_1 = t_{\vec{v}_1} + \vec{v}_2.$$

Așadar, în mulțimea T a translațiilor planului P, compunerea este o lege de compoziție peste tot definită.

R o t a ț i a. *Se numește rotație de centru O și unghi α (unghiul α considerat orientat) o transformare punctuală care face ca punctului O să-i corespundă tot O și oricărui punct M (respectiv N) să-i corespundă un punct M' (respectiv N') astfel încît* $OM = OM'$ *(respectiv* $ON = ON'$*) și* $\widehat{MOM'} = \alpha$ *(respectiv,* $\widehat{NON'} = \alpha$*)* (fig. 30).

Punctul O se numește *centrul de rotație*, iar unghiul α se numește *unghi de rotație.*

Rotația al cărui **unghi de rotație este 0** este transformarea identică a planului.

Se observă că o modificare a unghiului prin adăugirea sau scăderea unui multiplu de 2π, nu schimbă rotația în sensul că corespondența rămîne aceeași (fig. 31).

Notăm rotația de unghi α cu $R(\alpha)$.

Avem: $R(\alpha) = R(\alpha + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

De exemplu:

$$R\left(\frac{\pi}{6}\right) = R\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) \text{ sau}$$

$$R\left(\frac{\pi}{6}\right) = R\left(\frac{13\pi}{6}\right) \text{ (În grade, } R(30°) = R(390°).)$$

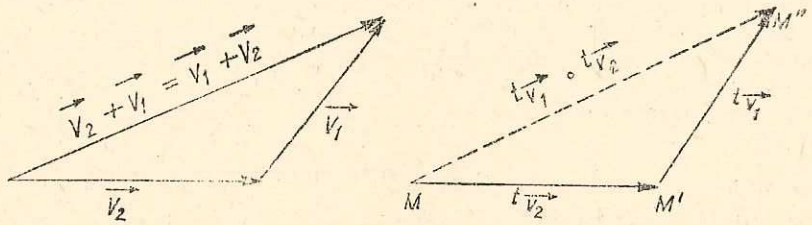

Fig. 29.

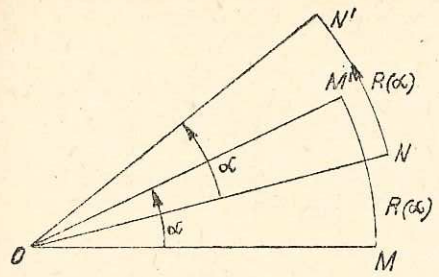

Fig. 30.

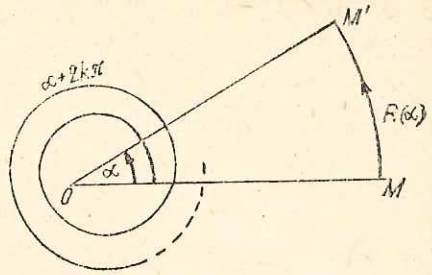

Fig. 31.

Compunerea a două rotații (de același centru O) este tot o rotație de centru O (fig. 32).

Se observă că $R(\alpha) \circ R(\beta) = R(\alpha + \beta)$.

De exemplu, $R(120°) \circ R(270°) = R(120° + 270°) = R(390°) = R(30°)$, $(30° = 390° - 360°)$.

5.1.10. **Adunarea și înmulțirea matricelor.** Modul cum se face adunarea și înmulțirea matricelor îl presupunem cunoscut din anul III. În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n adunarea este o lege de compoziție peste tot definită, căci suma a două matrice pătrate de ordinul n este o matrice pătrată de ordinul n (manualul de algebră pentru anul III).

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi, avem, de exemplu:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 3 \end{Vmatrix}.$$

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n înmulțirea este o lege de compoziție peste tot definită, căci produsul a două matrice pătrate de ordinul n este o matrice pătrată de ordinul n (manualul de algebră pentru anul III).

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi, avem, de exemplu:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2\cdot 6 + 3\cdot 8 & 2\cdot 7 + 3\cdot 9 \\ 4\cdot 6 + 5\cdot 8 & 4\cdot 7 + 5\cdot 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{Vmatrix}$$

5.1.11. **Adunarea și înmulțirea polinoamelor.** În mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-o mulțime de numere reale sau complexe, adunarea și înmulțirea sînt legi de compoziție in-

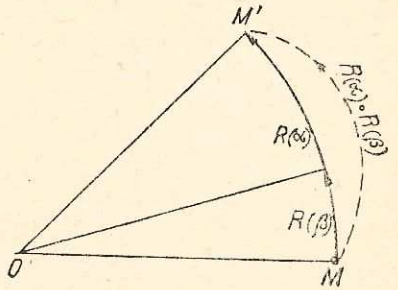

Fig. 32.

terne. Vom reveni cu mai multă precizie, asupra polinoamelor, în cadrul paragrafului *Inele de polinoame.*

5.1.12. **Clase de resturi.** *Împărțirea cu rest în mulțimea numerelor întregi.* În cazul numerelor întregi este adevărată următoarea proprietate:

Fiind date două numere întregi a și $b \neq 0$, există un singur număr întreg q și un singur număr întreg $r \geqslant 0$, astfel încît

$$\text{(a)} \quad a = b \cdot q + r \text{ și (b) } 0 \leqslant r < |b|.$$

Numărul întreg a se numește *deîmpărțit*, numărul întreg $b \neq 0$ se numește *împărțitor*, numărul întreg q se numește *cîtul* împărțirii lui a la b, iar r se numește *restul* împărțirii lui a la b.

Exemple. a) Cîtul împărțirii numărului -17 la 5 este -4, iar restul 3, căci $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$ și $0 < 3 < 5$. b) Cîtul împărțirii numărului -23 la -5 este 5, iar restul 2, căci $-23 = (-5) \cdot 5 + 2$ și $2 < |-5|$.

Observare. Dacă $b = 0$, nu există numerele q și r satisfăcînd condițiile cîtului și restului. Într-adevăr, relația $r < |b|$, devine $r < 0$, ori în enunț s-a presupus $r \geqslant 0$.

Clase de resturi modulo m. Fie m un număr natural. Împărțim mulțimea numerelor întregi în clase în modul următor: o clasă este formată din toate numerele întregi care împărțite la m dau același rest. O astfel de clasă se numește clasă de resturi modulo m. Deoarece resturile împărțirii la m sînt numerele $0,1,2\ldots, m-1$, avem m clase disjuncte de resturi modulo m. Numerele întregi din clasa corespunzătoare restului 0 sînt numerele întregi de forma mk ($k \in Z$), numerele întregi din clasa corespunzătoare restului 1 sînt numerele întregi de forma $mk + 1$ etc.

Exemple. Clasele de resturi modulo 4 sînt următoarele:

$C_0 = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8\ldots\} = \{4k \mid k \in Z\}$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 0.

$C_1 = \{\ldots -7, -3, 1, 5, 9,\ldots\} = \{4k + 1 \mid k \in Z\}$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 1

$C_2 = \{\ldots -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\} = \{4k + 2 \mid k \in Z\}$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 2.

$C_3 = \{\ldots -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\} = \{4k + 3 \mid k \in Z\}$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 3.

Oricare număr dintr-o anumită *clasă* se numește *reprezentant* al acelei clase. De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 4, numerele -2, 2, 6, 10 sînt reprezentanți ai clasei C_2.

Dacă x este un reprezentant al unei clase de resturi, atunci aceasta se mai notează cu $\hat{x}$. Cum într-o clasă există mai mulți reprezentanți, o clasă poate fi notată în mai multe feluri.

De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 4, clasa C_3 poate fi notată de pildă prin $\hat{3}$, prin $\hat{7}$, prin $-\hat{1}$ etc.

Pentru notarea unei clase se preferă de obicei cel mai mic reprezentant pozitiv (restul împărțirii la m). De exemplu, clasele de resturi modulo 4 pot fi notate astfel: $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$.

Adunarea. Înmulțirea. În mulțimea claselor de resturi modulo m, definim două legi de compoziție, una notată aditiv și a doua notată multiplicativ, în modul următor:

$$\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a + b},$$

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}.$$

Se observă că suma, respectiv produsul, dintre clasa $\hat{a}$ și $\hat{b}$ este exprimată cu ajutorul reprezentanților a și b. Se poate arăta că oricare ar fi reprezentanții aleși pentru clasele $\hat{a}$ și $\hat{b}$, clasa sumei, respectiv a produsului este aceeași.

De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 4 avem:

$$\hat{2} + \hat{3} = \widehat{2 + 3} = \hat{5},$$

$$\hat{2} \cdot \hat{3} = \widehat{2 \cdot 3} = \hat{6}.$$

Alegînd pentru clasa $\hat{2}$, ca reprezentant pe 6, iar pentru clasa $\hat{3}$ ca reprezentant pe -5, obținem:

$$\hat{6} + \widehat{(-5)} = \widehat{6 + (-5)} = \hat{1},$$

$$\hat{6} \cdot \widehat{(-5)} = \widehat{6 \cdot (-5)} = \widehat{-30}.$$

Suma, respectiv produsul, nu depinde de alegerea reprezentanților folosiți, căci $\hat{5} = \hat{1}$, respectiv $\hat{6} = \widehat{-30}$.

În mod uzual, cînd se fac calcule cu clase de resturi, se preferă cei mai mici reprezentanți pozitivi.

De exemplu, în cazul claselor de resturi, modulo 7, se iau ca reprezentanți unul din numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pentru a calcula $\hat{5} + \hat{6}$ se procedează astfel: $5 + 6 = 11$, 11 împărțit la 7 dă restul 4; deci $\hat{5} + \hat{6} = \hat{4}$. Pentru a afla produsul acestor clase, se procedează astfel: $\hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{30}$, 30 împărțit la 7 dă restul 2; deci $\hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$.

Dăm mai jos tabelul adunării și tabelul înmulțirii claselor de resturi modulo 5.

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

5.1.13. **O lege de compoziție pe mulțimea** R. Asociind oricărui cuplu (x, y) de numere reale numărul real $x \top y = 2x + y + 3xy$ definim pe mulțimea numerelor reale R o lege de compoziție peste tot definită.

Avem, de exemplu:

$$4 \top 5 = 2 \cdot 4 + 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 8 + 5 + 60 = 73.$$

5.1.14. **Observări.** 1) Fie $\top$ o lege de compoziție peste tot definită între elementele unei mulțimi E. Dacă $a = b$ și $x = y$, $(a \in M, b \in M, x \in M, y \in M)$, atunci rezultă, evident, că $a \top x = b \top y$

$$(a = b \text{ și } x = y) \Rightarrow a \top x = b \top y.$$

În particular, dacă $a \in M$ și $x = y$ $(x \in M, y \in M)$, atunci $a \top x = a \top y$:

$$x = y \Rightarrow a \top x = a \top y.$$

Se spune în acest caz că egalitatea $a \top x = a \top y$ s-a obținut din egalitatea $x = y$, prin compunere la stînga cu a.

Analog, $x = y \Rightarrow x \top a = y \top a$. În acest caz se spune că egalitatea $x \top a = y \top a$ s-a obținut din egalitatea $x = y$, prin compunere la dreapta cu a.

Din egalitatea $a \top x = a \top y$, nu rezultă în general, $x = y$. De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 6, avem $\hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{2} \cdot \hat{1}$ și $\hat{4} \neq \hat{1}$.

5.1.15. În paragrafele precedente s-a pus în evidență faptul că fiind dată o lege de compoziție pe o mulțime E putem face calcule și cu trei, patru, sau mai multe elemente din E, utilizînd scrierea cu paranteze. În general, compusul a trei sau mai multe elemente (considerate într-o anumită ordine) depinde de așezarea parantezelor. Se știe, pe de altă parte, că în cazul unor legi de compoziție definite pe mulțimi de numere (adunarea, înmulțirea) parantezele pot fi omise, deoarece compusul este independent de modul în care se așază parantezele.

De exemplu, notația $3 + 17 + 13$ poate reprezenta fie $3 + (17 + 13) = 3 + 30 = 33$, fie $(3 + 17) + 13 = 20 + 13 = 33$, căci $3 + (17 + 13) = (3 + 17) + 13$.

În cazul împărțirii, lipsa parantezelor poate duce la confuzii. De pildă scrierea $24 : 12 : 2$ poate fi interpretată ca $(24 : 12) : 2 = 2 : 2 = 1$ (aceasta este interpretarea curentă în aritmetică) sau ca $24 : (12 : 2) = 24 : 6 = 4$. În acest caz nu putem omite parantezele, scrierea $24 : 12 : 2$, fără o convenție prealabilă, fiind ambiguă.

Legile de compoziție interne, pentru care putem omite parantezele (calculele făcîndu-se însă de la „stînga la dreapta") se numesc legi de compoziție asociative. S-a constatat că dacă așezarea parantezelor nu influențează compusul a trei elemente, atunci compusul a patru, cinci sau mai multe elemente (considerate într-o anumită ordine) este de asemenea independent de așezarea parantezelor.

DEFINIȚIE. O lege de compoziție internă peste tot definită între elementele unei mulțimi E, notată cu semnul $\top$, se numește asociativă, dacă:

$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$, oricare ar fi elementele x, y, z (distincte sau nu) din E.

$$\forall x, y, z \in E : x \top (y \top z) = (x \top y) \top z.$$

Din definiție rezultă că o lege de compoziție peste tot definită între elementele unei mulțimi E este neasociativă dacă există un triplet (x, y, z) de elemente din E astfel încît:

$$x \top (y \top z) \neq (x \top y) \top z.$$

Adunarea în oricare din mulțimile numerice uzuale (N, Z, Q, R, C) precum și în orice mulțime de numere în care adunarea este peste tot definită, este asociativă, căci, oricare ar fi numerele x, y, z (distincte sau nu) avem:

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Înmulțirea este asociativă în orice mulțime de numere în care înmulțirea este peste tot definită, căci oricare ar fi numerele x, y, z avem:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

Scăderea respectiv împărțirea nu sînt asociative căci, de exemplu: $24 - (4 - 2) = 24 - 2 = 22$ și $(24 - 4) - 2 = 20 - 2 = 18$, deci $24 - (4 - 2) \neq (24 - 4) - 2$, respectiv $24 : (4 : 2) = 24 : 2 = 12$ și $(24 : 4) : 2 = 6 : 2 = 3$ și deci $24 : (4 : 2) \neq (24 : 4) : 2$. În folosirea scrierii cu linie de fracție (cazul numerelor) se utilizează linii mici sau mari. Motivul trebuie căutat în faptul că împărțirea este neasociativă, linia mare de fracție indicînd pe de-o parte o operație, iar pe de altă parte jucînd rol de paranteză. De pildă, $(24 : 4) : 2 = \frac{6}{2}$.

5.1.16. **Teorema de asociativitate.** Deoarece în cazul unei legi de compoziție asociative (notată cu semnul $\top$) compușii $x \top (y \top z)$ și $(x \top y) \top z$ sînt egali, se face convenția ca aceștia să fie notați cu semnul $x \top y \top z$, adică:

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z) = x \top y \top z.$$

Se poate demonstra că în cazul unei legi asociative compusul a patru sau mai multe elemente (considerate într-o anumită ordine) este același oricare ar fi modul de așezare a parantezelor. Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de *teorema de asociativitate*. Vom justifica această afirmație în cazul a patru elemente.

Fie E o mulțime și o lege de compoziție internă în E, peste tot definită, notată cu semnul $\top$.

Compusul lui a cu b cu c cu $d (a \in E, b \in E, c \in E, d \in E)$ poate fi interpretat în următoarele moduri:

(1) $(a \top b) \top (c \top d)$,
(2) $[(a \top b) \top c] \top d$,
(3) $[a \top (b \top c)] \top d$;
(4) $a \top [(b \top c) \top d]$.
(5) $a \top [b \top (c \top d)]$.

Toți compușii (1), (2), (3), (4), (5) *sînt egali.* Să arătăm că: $[(a \top b) \top c] \top d = (a \top b) \top (c \top d)$ (compusul (2) este egal cu compusul (1)).

Avem: $[(a \top b) \top c] \top d =$
$= [x \top c] \top d =$ (s-a notat $a \top b$ cu x)
$= (x \top c) \top d =$
$= x \top (c \top d) =$ (s-a aplicat asociativitatea)
$= (a \top b) \top (c \top d)$ (s-a înlocuit x cu $a \top b$)

Demonstrația pentru celelalte egalități o propunem ca exercițiu.

Oricare dintre compușii egali (1), (2), (3), (4), (5) se notează cu semnul $a \top b \top c \top d$.

În cazul unei legi de compoziție asociative compusul a cinci sau mai multe elemente se notează de asemenea fără paranteze.

5.1.17. **Exemple.** *a) Reuniunea, respectiv, intersecția sînt legi de compoziție, asociative, căci oricare ar fi mulțimile A, B, C avem:*

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, respectiv

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Vom scrie, conform cu convenția deja făcută, $A \cup B \cup C$ în loc de $A \cup (B \cup C)$, respectiv $(A \cup B) \cup C$ și $A \cap B \cap C$ în loc de $A \cap (B \cap C)$, respectiv $(A \cap B) \cap C$.

b) Compunerea funcțiilor (5.1.6) este o lege de compoziție asociativă în mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime E cu valori în E.

Într-adevăr, fie funcțiile $f : E \to E$, $g : E \to E$ și $h : E \to E$.

Fie $h(x) = y$, $g(y) = z$, $f(z) = t$. Avem:
$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = f(g(y)) = f(z) = t$ (fig. 33)
și $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(y) = f(z) = t$ (fig. 34).

Așadar, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, căci funcțiile $f \circ (g \circ h)$ și $(f \circ g) \circ h$ sînt ambele definite pe E, iau valori în E și realizează aceeași corespondență:

$$f \circ (g \circ h) : x \to t.$$

$$(f \circ g) \circ h : x \to t.$$

În particular, *compunerea permutărilor* (5.1.7), *compunerea transformărilor punctuale* (5.1.9) sînt legi de compoziție *asociative.*

c) Adunarea vectorilor de poziție este asociativă, căci oricare ar fi vectorii de poziție $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, avem:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3).$$

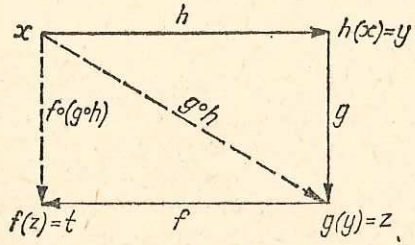

Fig. 33.

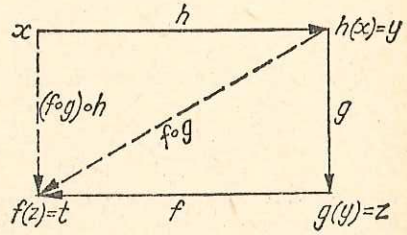

Fig. 34.

d) Adunarea și înmulțirea matricelor pătrate de ordinul n sînt legi de compoziție asociative, căci oricare ar fi matricele pătrate A, B, C, de ordinul n, avem:

$(A + B) + C = A + (B + C)$ și $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (manualul de algebră pentru anul III).

e) Adunarea, respectiv înmulțirea în clasele de resturi modulo m este *asociativă*. Într-adevăr,

$$(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \widehat{a + b} + \hat{c} = \widehat{(a+b)+c} = \widehat{a+(b+c)} = \hat{a} + \widehat{b + c} =$$
$$= \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}), \text{ respectiv}$$

$$(\hat{a} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{c} = \widehat{a \cdot b} \cdot \hat{c} = \widehat{(a \cdot b) \cdot c} = \widehat{a \cdot (b \cdot c)} = \hat{a} \cdot \widehat{(b \cdot c)} = \hat{a} \cdot (\hat{b} \cdot \hat{c}).$$

Comutativitate

5.1.18. Posibilitatea schimbării ordinii elementelor oferă simplificări considerabile în calcule. În cazul adunării și înmulțirii numerelor se știe că:

$x + y = y + x$, respectiv $x \cdot y = y \cdot x$.

Legile de compoziție interne care îndeplinesc o condiție analoagă cu cea menționată în cazul adunării și înmulțirii la numere se numesc legi de compoziție comutative.

DEFINIȚIE. O lege de compoziție internă, peste tot definită între elementele unei mulțimi E, notată cu semnul $\top$, este comutativă dacă, oricare ar fi elementele x și y din E avem:

$$x \top y = y \top x.$$

$$\forall x,\ y \in E : x \top y = y \top x.$$

Din definiție rezultă că o lege de compoziție internă, peste tot definită, între elementele unei mulțimi E, notată cu semnul $\top$, este necomutativă dacă există două elemente x și y astfel încît:

$$x \top y \neq y \top x.$$

5.1.19. **Teorema de comutativitate.** După cum am precizat la (5.1.16) în cazul unei legi asociative compusul a trei, sau mai multe elemente este același oricare ar fi modul de așezare a parantezelor.

În cazul unei legi asociative și comutative, se poate arăta că compusul a trei, sau mai multe elemente este același, oricare ar fi modul de așezare a parantezelor și ordinea în care se scriu elementele. Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de *teorema de comutativitate.*

În cazul a trei elemente compusul lui a cu b cu c se poate calcula în mai multe moduri, ca de exemplu:

(1) $(a \top b) \top c$ (notație: $a \top b \top c$)
(2) $(c \top b) \top a$ (notație: $c \top b \top a$)
(3) $c \top (a \top b)$ (notație: $c \top a \top b$).

Toți compușii aceștia sînt egali. Vom verifica această afirmație în cazul compușilor (1) și (2).

Avem:

$(c \top b) \top a =$
$= (b \top c) \top a =$ (comutativitatea aplicată elementelor c și b)
$= a \top (b \top c) =$ (comutativitatea aplicată elementelor $b \top c$ și a)
$= (a \top b) \top c$ (asociativitatea).

5.1.20. **Exemple.** a) Reuniunea și intersecția sînt legi de compoziție comutative căci, oricare ar fi mulțimile A și B, avem:

$A \cup B = B \cup A$ și $A \cap B = B \cap A$.

b) Compunerea funcțiilor definite pe o mulțime E, cu valori în E, care are cel puțin două elemente, este necomutativă.

Într-adevăr, fie $x_1 \in E$ și $x_2 \in E$, cu $x_1 \neq x_2$ și funcțiile $f : E \to E$, $g : E \to E$ date prin $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq x_1 \\ x_2, & x = x_1 \end{cases}$ și $(g(x) = \begin{cases} x, & x \neq x_2 \\ x_1, & x = x_2 \end{cases}$

Avem $f(g(x_1)) = f(x_1) = x_2$ și $g(f(x_1)) = g(x_2) = x_1$. Așadar, $f \circ g \neq g \circ f$.

c) Compunerea permutărilor asupra unei mulțimi E cu cel puțin trei elemente este necomutativă.

Într-adevăr, fie:

$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$. Avem:

$\Pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ și $\sigma \circ \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

Se observă că $\Pi \circ \sigma \neq \sigma \circ \Pi$.

d) Adunarea vectorilor de poziție este o lege de compoziție comutativă, căci $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (fig. 35).

e) Compunerea translațiilor și a rotațiilor sînt legi de compoziție comutative căci:

$t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_1} + t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_2 + \vec{v}_1} = t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1}$ și

$R(\alpha) \circ R(\beta) = R(\alpha + \beta) =$
$= R(\beta + \alpha) = R(\beta) \circ R(\alpha)$.

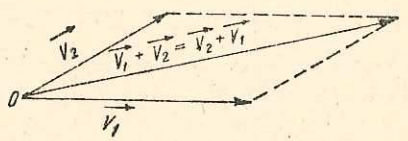

Fig. 35.

f) Adunarea matricelor pătrate de ordinul n este comutativă, căci oricare ar fi matricele pătrate A și B de ordinul n, avem $A + B = B + A$.

Înmulțirea matricelor pătrate de ordinul n este necomutativă (manualul de algebră pentru anul III).

g) Adunarea, respectiv înmulțirea în clasele de resturi modulo m, este comutativă. Într-adevăr,

$$\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a + b} = \widehat{b + a} = \hat{b} + \hat{a}, \text{ respectiv}$$

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b} = \widehat{b \cdot a} = \hat{b} \cdot \hat{a}.$$

Element neutru

5.1.21. Numerele 0 și 1 sînt „fără efect" la adunare, respectiv înmulțire. Mai precis:

(a) $0 + x = x + 0 = x$, oricare ar fi $x \in R$,

(b) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, oricare ar fi $x \in R$.

Se spune că 0 este *element neutru* pentru adunare, iar 1 este element *neutru* pentru înmulțire.

DEFINIȚIE. Fie E o mulțime pe care este dată o lege de compoziție peste tot definită, notată cu semnul $\top$. Dacă există un element $e \in E$ astfel încît:

$$e \top x = x \top e = x$$

oricare ar fi $x \in E$, acesta se numește element neutru pentru legea $\top$.

Observări. a) În cazul unei legi de compoziție comutative condiția $e \top x = x \top e = x$, poate fi înlocuită cu $e \top x = x$ sau $x \top e = x$, căci $x \top e = e \top x$.

b) Dacă legea este notată aditiv, atunci elementul neutru se notează cu 0, (prin analogie cu notația de la numere) și se numește *zero*. Avem: $x + 0 = 0 + x = x$. Dacă legea de compoziție este notată multiplicativ, atunci elementul neutru se notează cu 1 (prin analogie cu notația de la numere) sau cu e și se numește *element unitate*. Avem $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, respectiv $x \cdot e = e \cdot x = x$.

5.1.22. **Unicitatea elementului neutru**

Dacă există un element neutru e, acesta este unic.

Într-adevăr să presupunem că ar exista două elemente neutre e și e'. Considerăm compusul $e \top e'$.

e, fiind element neutru, avem: $e \top e' = e'$.

e', fiind element neutru avem: $e \top e' = e$. Deci $e = e'$.

5.1.23. **Exemple.** a) În mulțimea părților unei mulțimi E, mulțimea vidă este element neutru pentru reuniune, iar mulțimea E este element neutru pentru intersecție.

Într-adevăr, oricare ar fi partea X a lui E, avem:

$$X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X,$$

$$X \cap E = E \cap X = X.$$

b) În mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime E cu valori într-o mulțime E, aplicația identică e a mulțimii E ($e(x) = x, x \in E$) este element neutru pentru compunere.

Într-adevăr, dacă f este o funcție definită pe E cu valori în E, avem:

$(e \circ f)(x) = e(f(x)) = f(x)$; $e \circ f = f$ (fig. 36),

$(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x)$; $f \circ e = f$ (fig. 37).

Așadar, $e \circ f = f \circ e = f$.

În particular, permutarea identică este element neutru, pentru compunere, în mulțimea permutărilor asupra unei mulțimi.

c) În mulțimea vectorilor de poziție, vectorul nul $\vec{0}$ este element neutru, căci $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.

d) În cazul transformărilor punctuale, transformarea identică a planului este element neutru pentru compunere. Translația $t_{\vec{0}}$ de vector nul este element neutru în mulțimea translațiilor căci $t_{\vec{v}} + t_{\vec{0}} = t_{\vec{0}} + t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}}$. Rotația $R(0)$ de unghi 0 este element neutru în mulțimea rotațiilor de același centru, căci:

$$R(\alpha) \circ R(0) = R(0) \circ R(\alpha) = R(\alpha).$$

e) În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, matricea

$$\|0\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

este elemente neutru pentru adunare.

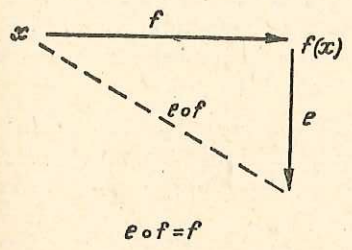

Fig. 36.

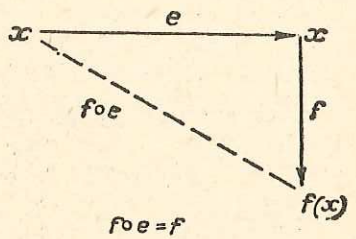

Fig 37.

Într-adevăr, oricare ar fi matricea pătrată A, de ordinul n, avem: $A + \|0\| = \|0\| + A = A$.

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, matricea

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}$$ este element neutru pentru înmulțire, căci

oricare ar fi matricea A, pătrată de ordinul n, avem:

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

f) În mulțimea claselor de resturi modulo m, clasa $\hat{0}$, respectiv $\hat{1}$, este element neutru pentru adunare, respectiv înmulțire.

Într-adevăr,

$$\hat{0} + \hat{a} = \widehat{0 + a} = \hat{a}, \text{ respectiv}$$
$$\hat{1} \cdot \hat{a} = \widehat{1 \cdot a} = \hat{a}.$$

Elemente simetrice

5.1.24. Se știe că pentru orice număr real x, există un număr real notat $-x$, cu proprietatea:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad (a).$$

Pentru orice număr real $x \neq 0$ există un număr, notat $\frac{1}{x}$ sau x^{-1}, astfel încît:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \quad (b)$$

Elementul $-x$ se mai numește *simetricul* lui x pentru adunare, iar elementul x^{-1} se mai numește *simetricul* lui x pentru înmulțire.

DEFINIȚIE. Fie E o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție, notată cu semnul $\top$, față de care există element neutru e. Un element $x' \in E$ se numește simetricul lui x pentru legea $\top$, dacă $x \top x' = x' \top x = e$.

Dacă legea de compoziție este notată aditiv atunci simetricul lui x, cînd există, se notează cu $-x$ și acesta se mai numește *opusul* lui x (notația și terminologia analoagă cu cea de la numere). În acest caz: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Dacă legea de compoziție este notată multiplicativ, atunci simetricul lui x, cînd există, se notează cu x^{-1} și acesta se mai numește *inversul* lui x (notație și terminologie analoagă cu cea de la numere). În acest caz: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Observări. a) Existența elementelor simetrice este condiționată de existența elementului neutru. Într-o lege de compoziție, fără element neutru, problema existenței elementelor simetrice nu se pune.

b) Dacă legea de compoziție este comutativă, atunci condiția $x \top x' = x' \top x = e$ poate fi înlocuită cu condiția $x \top x' = e$ sau $x' \top x = e$, căci $x \top x' = x' \top x$.

c) Elementul neutru e admite ca simetric pe el însuși: $e \top e = e$.

5.1.25. Unicitatea elementului simetric

Fie $\top$ o lege de compoziție asociativă definită într-o mulțime E, (e, elementul neutru). Dacă $x \in E$ admite un simetric x', atunci acesta este unic. Să presupunem că elementul x admite două simetrice x' și x''. Aceasta înseamnă că:

$$x \top x' = x' \top x = e \quad (a)$$
$$x \top x'' = x'' \top x = e \quad (b)$$

și

compunînd la stînga cu x'', egalitatea $x \top x' = e$ (a) obținem, pe rînd:

$x \top x' = e$	(egalitatea (a))
$x'' \top (x \top x') = x'' \top e$	(am compus la stînga cu x'')
$(x'' \top x) \top x' = x'' \top e$	(s-a folosit asociativitatea)
$(x'' \top x) \top x' = x''$	(s-a ținut seama că e este element neutru)
$e \top x' = x''$	(s-a ținut seama că x'' este simetricul lui x — relația (b)).
$x' = x''$	(s-a folosit faptul că e este element neutru: $e \top x' = x'$),

ceea ce a fost de demonstrat.

5.1.26. **Exemple.** a) În mulțimea părților unei mulțimi E, singurul element care admite un simetric pentru reuniune este mulțimea vidă $\varnothing$ (elementul neutru este mulțimea vidă).

Într-adevăr, relația $A \cup A' = \varnothing$ este adevărată atunci și numai atunci cînd $A = A' = \varnothing$.

Avem: $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ (simetricul lui $\varnothing$ este $\varnothing$).

În mulțimea părților unei mulțimi E, singurul element care admite un simetric pentru intersecție este mulțimea E. Justificare analoagă cu cazul precedent (elementul neutru este mulțimea E).

b) În mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime E cu valori în aceeași mulțime, singurele elemente care admit simetrice față de compunere sînt funcțiile bijective (elementul neutru este aplicația identică e). Dacă funcția $f: E \to E$ este bijectivă atunci simetricul lui f este funcția

inversă f^{-1}: $E \to E$. Avem: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. (Manualul de analiză pentru anul III).

c) În mulțimea permutărilor asupra unei mulțimi $E = \{1, 2, ..., n\}$ orice permutare (aplicația bijectivă) admite element simetric, față de compunere (elementul neutru este permutarea identică).

Verificăm afirmația în cazul permutărilor asupra mulțimii {1, 2, 3, 4}.

Fie $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ o permutare asupra mulțimii {1, 2, 3, 4}.

Inversa acestei permutări este permutarea

$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Într-adevăr,

$$f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = e.$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

Așadar, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. Vom mai scrie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) În mulțimea vectorilor de poziție, orice vector admite un element simetric (fig. 38) notat $-\vec{v}$.

Avem: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = 0$.

e) Orice translație admite un element simetric pentru compunere:

Avem: $t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}}$. Într-adevăr $t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{v}} = t_{\vec{0}}$ (compunerea translațiilor este comutativă: $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$).

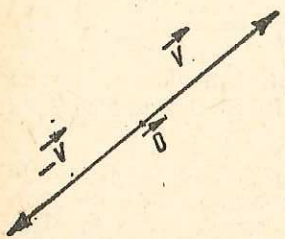

Fig. 38.

În mulțimea rotațiilor de același centru, fiecare rotație admite un element simetric pentru compunere.

Avem: $R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha)$.

Într-adevăr:

$R(\alpha) \circ R^{-1}(\alpha) = R(\alpha) \circ R(-\alpha) = R(\alpha + (-\alpha)) = R(0)$ (compunerea rotațiilor este comutativă: $R^{-1}(\alpha) \circ R(\alpha) = R(\alpha) \circ R^{-1}(\alpha)$).

f) În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, orice matrice $A = \| a_{ij} \|$ admite un opus, matricea $-A = \| -a_{ij} \|$. Avem: $A + (-A) = (-A) + A = \| 0 \|$.

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, matricele nesingulare (cele care au determinantul diferit de 0) sînt singurele matrice inversabile (manualul de algebră, anul III). Într-adevăr, dacă $\det(A) \neq 0$, atunci există A^{-1}, astfel încît $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (E; matricea unitate).

g) În mulțimea claselor de resturi, modulo un număr natural, orice element admite un simetric față de adunare (orice element are un opus). Avem:

$$-\hat{x} = \widehat{-x}.$$

Într-adevăr, $\hat{x} + \widehat{(-x)} = \widehat{x + (-x)} = \hat{0}$. Deci $-\hat{x} = \widehat{-x}$.

De exemplu, în mulțimea claselor de resturi modulo 5, avem:

$$-\hat{0} = \hat{0}$$

$$-\hat{1} = \widehat{-1} = \hat{4}$$

$$-\hat{2} = \widehat{-2} = \hat{3}$$

$$-\hat{3} = \widehat{-3} = \hat{2}$$

$$-\hat{4} = \widehat{-4} = \hat{1}.$$

Se poate demonstra că în mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural prim, orice element diferit de $\hat{0}$ admite un simetric față de înmulțire.

De exemplu, în mulțimea claselor de resturi modulo 5, avem

$(\hat{1})^{-1} = \hat{1}$.	Verificare:	$(\hat{1})^{-1} \cdot \hat{1} = \hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}$
$(\hat{2})^{-1} = \hat{3}$.	Verificare:	$(\hat{2})^{-1} \cdot \hat{2} = \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{6} = \hat{1}$
$(\hat{3})^{-1} = \hat{2}$.	Verificare:	$(\hat{3})^{-1} \cdot \hat{3} = \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{6} = \hat{1}$
$(\hat{4})^{-1} = \hat{4}$.	Verificare:	$(\hat{4})^{-1} \cdot \hat{4} = \hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{16} = \hat{1}$.

În cazul claselor de resturi modulo un număr natural m neprim există elemente care nu admit simetrice față de înmulțire (divizorii proprii ai lui m).

De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 12, elementul $\hat{3}$ nu admite un invers.

Într-adevăr, să presupunem că $\hat{3}$ ar admite ca invers pe $\hat{x}(x \in Z)$. Atunci $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{1}$, sau $\widehat{3 \cdot x} = \hat{1}$, de unde $3x - 1 = 12k$.

Din ultima egalitate, deducem $3(x - 4k) = 1$, de unde rezultă că 3 divide pe 1, ceea ce este fals.

Distributivitate

5.1.27. Se știe că în calculul cu numere, proprietatea care face legătura între adunare și înmulțire este proprietatea de distributivitate:

$$x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \text{(a)}$$
$$(y + z) \cdot x = yx + zx \qquad \text{(b)}$$

Această proprietate joacă un rol esențial în calculele unde apar aceste două operații.

DEFINIȚIE. Fie E o mulțime înzestrată cu două legi de compoziție interne peste tot definite notate cu semnele $\top$ și $\perp$. Se spune că legea $\top$ este distributivă față de legea $\perp$ dacă oricare ar fi x, y, z distincte sau nu din E, avem:

(1) $$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z) \text{ și}$$

(2) $$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x)$$

În cazul că prima lege este notată multiplicativ iar a doua aditiv, relațiile (1) și (2) devin:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

Observare. În cazul cînd legea notată cu semnul $\cdot$ este distributivă față de legea notată cu semnul $+$, și legea $\cdot$ este comutativă, atunci condițiile (1) și (2) sînt îndeplinite, dacă este îndeplinită numai una dintre ele.

5.1.28. **Exemple.** Se demonstrează că, în mulțimea părților unei mulțimi E, intersecția este distributivă față de reuniune și reuniunea este distributivă față de intersecție, adică oricare ar fi părțile A, B, C ale lui E, avem:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \text{ respectiv,}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

S-a scris o singură relație, pentru fiecare caz, deoarece intersecția, respectiv reuniunea este comutativă.

b) În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, înmulțirea este distributivă față de adunare, căci oricare ar fi matricea A, B, C, din mulțimea considerată, avem:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad (1)$$
$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \qquad (2)$$

c) În mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural, înmulțirea este distributivă față de adunare.

Aceasta înseamnă că oricare ar fi elementele $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, dintr-o mulțime de clase de resturi avem:

$$\hat{x} \cdot (\hat{y} + \hat{z}) = (\hat{x} \cdot \hat{y}) + (\hat{x} \cdot \hat{z}).$$

Într-adevăr, $\hat{x} \cdot (\hat{y} + \hat{z}) = \hat{x} \cdot \widehat{(y + z)} = \widehat{x \cdot (y + z)} = \widehat{x \cdot y + x \cdot z} =$

$$= \widehat{x \cdot y} + \widehat{x \cdot z} = \hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{x} \cdot \hat{z}.$$

5.2. Structuri algebrice: grup, inel, corp

5.2.1. **Introducere.** S-a văzut în paragrafele precedente, că prin darea unei legi de compoziție (sau mai multe) pe o mulțime, avem posibilitatea de a face calcule cu elementele mulțimii respective, asemănătoare, din unele puncte de vedere, cu calculele din algebra elementară. În algebră interesează acele legi de compoziție care au simultan mai multe proprietăți.

O lege de compoziție între elementele unei mulțimi care îndeplinește anumite condiții, se spune că determină pe mulțimea respectivă o *structură algebrică*. Condițiile respective se mai numesc *axiomele* structurii, căci din ele rezultă toate proprietățile (teoremele structurii respective*).

Exemplu. S-a observat că mulțimile Z, Q, R, C înzestrate cu adunarea, mulțimea permutărilor asupra unei mulțimi înzestrate cu operația de compunere, mulțimea matricelor pătrate de ordinul n înzes-

* În afară de structurile algebrice, în matematică mai sînt cunoscute următoarele structuri: 1. *structura de ordine* (caracterizată prin darea unei relații de ordine) și 2. *structura topologică* (prezentarea axiomelor acestei structuri depășește cu mult cadrul acestui manual).

tratã cu adunarea, mulțimea claselor de resturi modulo n, înzestratã cu adunarea etc. au o particularitate comunã:

Operația consideratã este *asociativã*, există *element neutru*, orice element admite un *simetric*.

S-a constatat, în plus, cã din aceste condiții rezultã un numãr foarte mare de consecințe și aceasta a determinat interesul de a studia proprietãțile unei legi de compoziție, definitã pe o mulțime arbitrarã, *asociativã*, cu *element neutru*, astfel încît orice element sã admitã un *simetric*. A apãrut astfel structura algebricã de grup, caracterizatã de urmãtoarele *axiome*:

A. *Asociativitate*,
B. *Existența elementului neutru*,
C. *Orice element admite un simetric*.

Toate proprietãțile care rezultã din aceste axiome sînt, în particular, adevãrate în grupurile concrete cunoscute, cum ar fi cele menționate mai înainte.

Numãrul mare de proprietãți, pe care le au grupurile, precum și numeroasele aplicații pe care le au acestea în alte ramuri ale matematicii, au determinat pe algebriști sã studieze în mod special structura de grup. S-a creat astfel un capitol vast al Algebrei, cunoscut sub denumirea de *Teoria Grupurilor*.

Asupra structurii de *grup* vom reveni în paragraful urmãtor.

Cele mai importante structuri algebrice sînt urmãtoarele: *grupul*, *inelul*, *corpul*, *modulul*, *spațiul vectorial*, *algebra*. În acest manual nu le vom studia decît pe primele trei.

Mai precizãm, pentru a înlãtura eventualele confuzii existente, cã prin *axiome* nu trebuie înțeles niște adevãruri evidente din punct de vedere intuitiv (așa cum se afirmã uneori, despre axiomele geometriei), ci un sistem de propoziții din care rezultã toate proprietãțile din teoria respectivã. Alegerea unui sistem de axiome nu se face în mod arbitrar. Se are în vedere sã decurgã din ele, pe cît posibil mai ușor, proprietãți care sã justifice importanța teoriei respective și sã permitã aplicarea teoriei respective la modelele concrete importante.

În mod curent, cînd s-a stabilit un sistem convenabil de axiome, pentru o teorie, se spune cã s-a fãcut *axiomatizarea* teoriei respective și cã deducerea proprietãților (teoremelor) teoriei respective se face prin *metoda axiomaticã*.

Menționãm, în plus cã, în general, o teorie poate fi axiomatizatã în mai multe moduri echivalente, astfel încît există posibilitatea ca o propoziție care este *axiomã* într-o *axiomatizare*, sã devinã *teoremã* (consecințã) în alt sistem de axiome.

Pentru exemplificare, vom considera cazul grupurilor. Se poate demonstra cã în cazul unei mulțimi G înzestrate cu o lege de compoziție notatã multiplicativ, asociativã (A), cu element neutru (N), astfel încît orice element admite un simetric (S) (axiomele grupului), rezultã cã

(T): „orice ecuație $ax = b$ și $xa = b$ are soluție unicã“ ($a \in G$, $b \in G$, $x \in G$). În cadrul sistemului de axiome (A), (N), (S), propoziția (T) este o teoremã (se va demonstra aceastã afirmație în paragraful urmãtor). Se poate aratã cã dacã se consideră o mulțime G înzestratã cu o lege de compoziție asociativã (A), astfel, încît „orice ecuație de forma $xa = b$ și $ax = b$ are soluție unicã“ (T), atunci G este un grup în accepția anterioarã. În acest al doilea caz axiome sînt propozițiile (A) și (T), iar propozițiile (N) și (S) sînt teoreme (rezultã din axiomele (A) și (T)).

În zilele noastre, marea majoritate a teoriilor din matematicã sînt axiomatizate și se fac chiar încercãri, unele reușite, de axiomatizare a unor capitole din științe mai puțin înrudite cu matematica.

Grupuri

5.2.2. DEFINIȚIE. O lege de compoziție între elementele unei mulțimi G, determinã pe aceasta o structurã de grup dacã:
(P) legea de compoziție este peste tot definitã,
(A) legea de compoziție este asociativã,
(N) există element neutru,
(S) orice element din G admite un simetric.

Mulțimea G înzestratã cu o structurã de grup, poartã numele de *grup*.

Dacã, în plus, legea de compoziție este *comutativã*, se spune cã grupul este *comutativ* sau *abelian*.

Condițiile (P), (A), (N), (S) sînt așadar, *axiomele* grupului*. Dacã legea de compoziție este notatã cu semnul $\top$, axiomele grupului pot fi redactate explicit, astfel:

(P) Compasul $x \top y$ este definit, oricare ar fi elementele $x \in G$ și $y \in G$ (distincte sau nu).

(A) $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$ (oricare ar fi x, y, z elemente distincte sau nu din G).

(N) Există în G un element e astfel încît $e \top x = x \top e = x$ (oricare ar fi $x \in G$).

(S) Pentru orice $x \in G$, există un element $x' \in G$ astfel încît:

$$x \top x' = x' \top x = e.$$

* În mod curent condiția (P) nu este menționată printre axiomele grupului. Noi am trecut această condiție printre axiome, pentru a preîntîmpina unele greșeli curente, izvorîte din faptul cã nu sîntem în posesia unor noțiuni (parte stabilã, subgrup) care ar permite evitarea greșelilor.

Dacă legea de compoziție este notată aditiv, respectiv multiplicativ, axiomele grupului sînt următoarele:

Transcriere aditivă	Transcriere multiplicativă
(P) $x + y$ este definit, oricare ar fi $x \in G$, $y \in G$ (evident, $x + y$ trebuie să aparțină lui G).	(P) $x \cdot y$ este definit, oricare ar fi $x \in G$, $y \in G$ (evident $x \cdot y$ trebuie să aparțină lui G).
(A) $x + (y + z) = (x + y) + z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$.	(A) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$.
(N) există în G un element notat cu 0 — elementul neutru — astfel încît: $x + 0 = 0 + x = x$, oricare ar fi $x \in G$.	(N) există în G un element notat cu 1, respectiv e, astfel încît: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, respectiv $x \cdot e = e \cdot x = x$, oricare ar fi $x \in G$.
(S) Pentru orice $x \in G$, există un element opus $(-x) \in G$ (simetricul lui x) astfel încît: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.	(S) Pentru orice $x \in G$, există un element invers $x^{-1} \in G$ (simetricul lui x) astfel încît: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
În cazul cînd legea de compoziție notată aditiv, determină o structură de grup, se mai spune că grupul respectiv este un *grup aditiv*.	În cazul cînd legea de compoziție, notată multiplicativ, determină o structură de grup, se mai spune că grupul respectiv este un *grup multiplicativ*.

5.2.3. **Exemple.** a) Mulțimea numerelor naturale N, înzestrată cu adunarea respectiv înmulțirea nu este un grup, căci, de exemplu, condiția (S) nu este îndeplinită.

Într-adevăr, de pildă elementul 3 nu admite un opus (-3), respectiv un invers $\left(3^{-1} = \frac{1}{3}\right)$ care să aparțină lui N. Condiția (S) nu este îndeplinită.

b) Mulțimea Z a numerelor întregi formează un grup față de adunare, *grupul aditiv al numerelor întregi.*

Într-adevăr:

(P) Dacă $x \in Z$ și $y \in Z$, atunci $x + y \in Z$ (suma a două numere întregi este un număr întreg). Adunarea este o lege de compoziție peste tot definită în mulțimea numerelor întregi.

(A) Adunarea, în mulțimea numerelor întregi, este asociativă:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \text{ oricare ar fi } x \in Z,\ y \in Z,\ z \in Z.$$

(N) În Z există un element neutru, elementul 0:

$$x + 0 = 0 + x = x, \text{ oricare ar fi } x \in Z.$$

(S) Pentru orice $x \in Z$, există un element $-x \in Z$ (elementul simetric al lui x) astfel încît:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Deoarece adunarea este și comutativă ($x + y = y + x$, oricare ar fi numerele întregi x și y), grupul aditiv al numerelor întregi este un grup *comutativ*.

Mulțimea Z a numerelor întregi nu formează grup față de înmulțire. Într-adevăr, nici un element, diferit de ± 1, nu admite un simetric față de înmulțire. Condiția (S) nu este îndeplinită.

c) *Mulțimea Q a numerelor raționale formează grup comutativ față de adunare, grupul aditiv al numerelor raționale.* Justificarea acestei afirmații se face în mod analog, ca în cazul grupului aditiv al numerelor întregi.

Mulțimea Q a numerelor raționale nu formează grup față de înmulțire. Într-adevăr, sînt îndeplinite condițiile (P), (A), (N), dar nu este îndeplinită condiția (S), căci în Q există un element, elementul 0, care nu este inversabil.

d) Mulțimea $Q' = Q \setminus \{0\}$ (mulțimea numerelor raționale diferite de 0), formează grup față de înmulțire, grupul multiplicativ al numerelor raționale diferite de 0. Dacă $x \in Q'$ și $y \in Q'$, atunci $x \cdot y \in Q'$. (Produsul a două numere raționale diferite de 0 este un număr rațional diferit de 0.) Înmulțirea este peste tot definită în Q'.

(A) Înmulțirea în Q' este asociativă:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \text{ (oricare ar fi } x, y, z \in Q').$$

(N) În Q' există un element neutru pentru înmulțire, elementul 1. Într-adevăr

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \text{ oricare ar fi } x \in Q'.$$

(S) Pentru orice element x din Q', există un element x^{-1} (inversul lui x) astfel încît:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Deoarece înmulțirea este comutativă, rezultă că *grupul multiplicativ al numerelor raționale este comutativ.*

În mod analog se justifică următoarele afirmații:

e) Adunarea determină pe mulțimea numerelor reale o structură de grup, *grupul aditiv al numerelor reale.* Acest grup este *comutativ.*

f) Adunarea determină pe mulțimea numerelor complexe o structură de grup, *grupul aditiv al numerelor complexe.*

Acest grup este comutativ.

Înmulțirea nu determină pe mulțimea numerelor reale, respectiv, mulțimea numerelor complexe, o structură de grup. (Numărul real 0, respectiv numărul complex 0, nu admite simetric.)

g) Înmulțirea determină pe mulțimea numerelor reale diferite de 0 ($R \setminus \{0\}$) o structură de grup, *grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de* 0. Acest grup este comutativ.

h) Înmulțirea determină pe mulțimea numerelor complexe diferite de 0 ($C \setminus \{0\}$) o structură de grup, *grupul multiplicativ al numerelor complexe diferite de* 0.

i) Înmulțirea determină pe mulțimea numerelor reale pozitive R_+, o structură de grup, *grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive.* Într-adevăr,

(P) Înmulțirea este peste tot definită în mulțimea R_+, căci produsul a două numere reale pozitive este un număr real pozitiv.

(A) Înmulțirea este asociativă.

(N) În R_+ există element neutru, pentru înmulțire, elementul 1 ($1 \in R_+$).

(S) Inversul unui număr real pozitiv este tot un număr real pozitiv.

j) *În mulțimea $\mathfrak{F}$ a aplicațiilor bijective ale unei mulțimi E pe ea însăși, compunerea determină o structură de grup.*

Pentru demonstrația acestei afirmații verificăm axiomele grupului.

(P) Prin compunerea a două funcții bijective definite pe o mulțime E cu valori în E, obținem o funcție bijectivă definită pe E cu valori în E. Într-adevăr, fie $g : E \to E$ și $f : E \to E$ două aplicații bijective (deci injective și surjective).

1) Funcția $g \circ f$ este definită pe E cu valori în E (fig. 39).

2) Funcția $g \circ f$ este bijectivă, căci sînt adevărate următoarele implicații:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$ (Funcția f este injectivă.)

$\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. (Funcția g este injectivă.)

3) Funcția $g \circ f$ este surjectivă, căci, oricare ar fi $z \in E$, există $y \in E$, astfel încît $z = g(y)$ și oricare ar fi $y \in E$, există $x \in E$, astfel încît $y = f(x)$ și deci $z = g(f(x))$; oricare ar fi $z \in E$, există $x \in E$, astfel încît $z = g(f(x))$.

Compunerea aplicațiilor bijective definite pe E cu valori în E este o lege de compoziție peste tot definită (condiția (P)).

(A) Compunerea aplicațiilor bijective $f : E \to E$ este asociativă. (S-a demonstrat la 5.1.17 (b)).

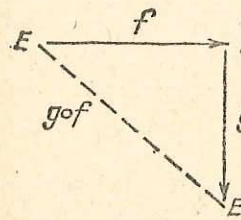

Fig. 39.

(N) În mulțimea aplicațiilor bijective $f : E \to E$, aplicația identică e, $e(x) = x$, care este bijectivă, este element neutru (5.1.23, b).

$e \circ f = f \circ e = f$, oricare ar fi aplicația bijectivă $f : E \to E$.

(S) Pentru orice aplicația bijectivă $f : E \to E$, există o aplicație bijectivă $f^{-1} : E \to E$ (5.1.26 (b)), inversa funcției f (aplicația f fiind bijectivă, este inversibilă) astfel încît:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e.$$

Grupul aplicațiilor bijective $f : E \to E$ (grup față de compunere) se mai numește *grupul transformărilor mulțimii E.*

Dacă mulțimea E are cel puțin trei elemente x_1, x_2, x_3 atunci grupul transformărilor mulțimii E este *necomutativ.*

Într-adevăr, fie $f : E \to E$ și $g : E \to E$ două aplicații bijective definite astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \notin \{x_2, x_3\} \\ x_3, \text{ dacă } x = x_2 \\ x_2, \text{ dacă } x = x_3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \notin \{x_1, x_2\} \\ x_2 \text{ dacă } x = x_1 \\ x_1, \text{ dacă } x = x_2. \end{cases}$$

Evident că aplicațiile f și g sînt bijective.

Avem: $g(f(x_3)) = g(x_2) = x_1$ și $f(g(x_3)) = f(x_3) = x_2$. Așadar, $g \circ f \neq f \circ g$.

1) În particular, dacă mulțimea E este finită, grupul transformărilor mulțimii E, devine grupul permutărilor asupra mulțimii E. Dacă mulțimea E are n elemente — putem considera $E = \{1, 2, ..., n\}$ — atunci grupul permutărilor asupra mulțimii E este un grup cu $n!$ elemente (există $n!$ permutări asupra mulțimii $E = \{1, 2, ..., n\}$. Grupul permutărilor asupra unei mulțimi cu n elemente se mai numește *grupul simetric de gradul n și se notează cu σ_n.*

Pentru $n \geqslant 3$, acest grup este necomutativ.

De exemplu, grupul simetric de gradul 3 (grupul permutărilor asupra mulțimii $E = \{1, 2, 3\}$) este un grup necomutativ cu 6 elemente.

Se verifică fără dificultate că:

m) mulțimea vectorilor de poziție formează grup comutativ față de adunare,

n) mulțimea translațiilor formează un grup comutativ față de compunere,

p) mulțimea rotațiilor de același centru, formează grup comutativ față de compunere,

q) mulțimea matricelor pătrate de ordinul n formează grup comutativ față de adunare, dar nu formează grup față de înmulțire căci matricele singulare nu sînt inversabile (manualul de algebră pentru anul III),

r) mulțimea claselor de resturi modulo n formează grup față de adunare, dar nu formează grup față de înmulțire, căci 0 este neinversabil.

5.2.4. Consecințe imediate ale axiomelor grupului

a) *Compusul a trei, patru, sau mai multe elemente este același, oricare ar fi modul de așezare a parantezelor* (consecință a axiomei (A), 5.1.16 — teorema de asociativitate).

b) *Într-un grup există un element neutru* (axioma (N)) *și numai unul* (5.1.22, unicitatea elementului neutru).

c) *Orice element admite un simetric și numai unul* (existența este dată de axioma (S), iar unicitatea este dată de axiomele (S) și (A); v. 5.1.25 — unicitatea elementului simetric).

d) *Într-un grup G a cărui lege este notată multiplicativ avem:* $(x^{-1})^{-1} = x$.

Într-adevăr, din $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ (axioma (S)) rezultă că inversul lui x^{-1} este x.

În cazul unui grup a cărui lege este notată aditiv avem $-(-x) = x$.

5.2.5. **Elementul x^n, respectiv $nx (x \in N)$, operații cu elemente de această formă.** Legea de compoziție a unui grup fiind asociativă, compusul a trei, patru sau mai multe elemente nu depinde de așezarea parantezelor (Teorema de asociativitate 5.1.16). Ne vom ocupa la acest punct de cazul particular, cînd se compune un element cu el însuși de mai multe ori, mai precis de elemente de forma $x \top x \top x \top \ldots \top x$.

Fie un grup G, a cărui lege este notată multiplicativ. Prin analogie cu notațiile folosite la numere, vom pune:

$$x^1 = x$$
$$x^2 = x \cdot x$$
$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$
$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$
$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\ldots \cdot x}_{n \text{ elemente}} (n \in N)$$

Elementul x^n va fi numit puterea a n-a a lui x.

Observări 1) În cazul unei legi neasociative, notată multiplicativ, se poate defini ca mai sus puterea întîi și a doua. Începînd de la puterea a treia, este necesară o scriere cu paranteze. De obicei în acest caz se preferă o definiție de la „stînga la dreapta":

$x^3 = (x \cdot x) \cdot x$ (primul x din stînga se compune cu al doilea și rezultatul cu al treilea)

$$x^4 = [(x \cdot x) \cdot x]x \text{ etc.}$$

Se observă că acceptînd această definiție, în general, în cazul unei legi neasociative avem $x^3 \neq x \cdot (x \cdot x)$, $x^4 \neq (x \cdot x) \cdot (x \cdot x)$, $x^4 \neq x \cdot [x(x \cdot x)]$ etc.

Dacă legea grupului G este notată aditiv, atunci prin analogie cu notațiile de la numere se pune:

$$1 \cdot x = x$$
$$2 \cdot x = x + x$$
$$3 \cdot x = x + x + x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n \cdot x = \underbrace{x + x + \ldots\ldots + x}_{n \text{ elemente}} (x \in N).$$

Precizăm că, în general, scrierea nx nu reprezintă o înmulțire între n și x, ci numai o notație pentru elementul $\underbrace{x + x + \ldots\ldots + x}_{n \text{ elemente}}$ (De altfel, în general, $n \notin G$).

De exemplu, în grupul aditiv G al claselor de resturi modulo 3 avem:

$$5 \cdot \hat{2} = \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{1} \ (5 \notin G).$$

Avem:

(1) $$x^n x^m = x^{n+m}$$

(2) $$(x^n)^m = x^{nm}.$$

Într-adevăr,

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ elemente}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{m \text{ elemente}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n+m \text{ elemente}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ elemente}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ elemente}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ elemente}}}_{m \text{ paranteze}} =$$

$$= \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{mn \text{ elemente}} = x^{n \cdot m}.$$

Se observă că în demonstrația relațiilor (1) și (2) nu a intervenit decît axioma (A). Aceste egalități sînt deci adevărate, pentru orice lege asociativă notată multiplicativ.

În cazul cînd legea grupului este notată aditiv, relațiile (1) și (2) devin:

(1) $$nx + mx = (n + m)x,$$

(2) $$m(nx) = (mn)x.$$

2) Egalitatea $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, adevărată în cazul numerelor, nu este adevărată, în general, într-un grup necomutativ.

De exemplu, dacă considerăm grupul necomutativ al permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ și notăm $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Avem:

$$(f \circ g)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f^2 \circ g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ și deci } (f \circ g)^2 \neq f^2 \circ g^2.$$

5.2.6. **Simetricul compusului a două sau mai multe elemente.** Fie G un grup notat multiplicativ și $x \in G$, $y \in G$.

Avem:

1) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.

Într-adevăr,

$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (G fiind grup, x, respectiv y admite un simetric x^{-1}, respectiv y^{-1}).

$= x \cdot [(yy^{-1}) \cdot x^{-1}] =$ (teorema de asociativitate — 5.1.16).

$= x \cdot (ex^{-1}) =$

$= x \cdot x^{-1} = e.$

Așadar, $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = e$. în mod analog, se arată că $(y^{-1}x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = e$. Ultimele două egalități arată că elementul $y^{-1} \cdot x^{-1}$ este simetricul elementului xy, adică

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

Se poate demonstra fără dificultate că

(2) $(x \cdot y \cdot z)^{-1} = z^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}$,

.....

(3) $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = x_n^{-1} \ldots x_2^{-1} \cdot x_1^{-1}$.

În cazul cînd legea grupului este notată aditiv egalitățile (1), (2), (3) se transcriu astfel:

(1) $-(x + y) = (-y) + (-x)$,

(2) $-(x + y + z) = (-z) + (-y) + (-x)$,

(3) $-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = (-x_n) + \ldots + (-x_2) + (-x_1)$.

În cazul cînd grupul G multiplicativ este comutativ, avem evident:

$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

$(x \cdot y \cdot z)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z^{-1}$,

$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{-1}$

5.2.7. **Puteri cu exponent întreg într-un grup multiplicativ. Într-un grup G, notat multiplicativ, avem:** $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$, $n \in N$. Redăm ideile demonstrației în cazul $n = 3$.

Avem:

$x^3 \cdot (x^{-1})^3 =$

$= (x \cdot x \cdot x) \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1}) =$

$= (x \cdot x) \cdot (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (S-a folosit asociativitatea care permite să așezăm parantezele cum dorim.)

$= (x \cdot x)e(x^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (S-a ținut seama că $x \cdot x^{-1} = e$.)

$= (x \cdot x) \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (S-a ținut seama că e este element neutru.)

$= x \cdot (x \cdot x^{-1}) \cdot x^{-1} =$ (Se repetă procedeul anterior.)

$= x \cdot e \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = e$

Așadar, $x^3 \cdot (x^{-1})^3 = e$. în mod analog se demonstrează că $(x^{-1})^3 \cdot x^3 = e$. Deci, $x^3(x^{-1})^3 = (x^{-1})^3 \cdot x^3 = e$, egalitatea care dovedește că $(x^{-1})^3$ este inversul lui x^3, adică $(x^3)^{-1} = (x^{-1})^3$.

Relațiile (a) $x^n \cdot x^m = x^{n+n}(n, m \in N)$, (b) $(x^n)^m = x^{nm}(n, m \in N)$ și (c) $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}(n \in N)$ permit să generalizăm noțiunea de putere, de

la puterea de exponent natural, la puterea de exponent întreg (într-un grup multiplicativ), procedînd asemănător cu cazul numerelor.

În acest scop, vom pune:

$x^0 = e$,

$x^{-n} = (x^{-1})^n$ sau $x^{-n} = (x^n)^{-1}$ $((x^{-1})^n = (x^n)^{-1})$, $n \in N$.

Egalitățile (a), (b), (c) rămîn adevărate și în cazul exponenților întregi. Așadar, avem

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in Z \qquad \text{(a)}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in Z \qquad \text{(b)}$$

$$(x^{-1})^\alpha = (x^\alpha)^{-1}, \quad \alpha \in Z \qquad \text{(c)}$$

Vom demonstra numai că egalitatea (a) este adevărată, celelalte le propunem ca exerciții.

Cazul 1. $\alpha = n$, $\beta = m$; $n, m \in N$.
Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^n \cdot x^m = x^{n+m} = x^{\alpha+\beta}$ (acest caz a fost studiat).
Cazul 2. $\alpha = 0$, $\beta = n$, $n \in N$.
Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^0 \cdot x^n = e \cdot x^n = x^n = x^{0+\alpha} = x^{\alpha+\beta}$.
În cazul $\alpha = n$, $\beta = 0$, $n \in N$ se procedează la fel ca în cazul 2.
Cazul 3. $\alpha = 0$, $\beta = -n$, $n \in N$.
Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^0 \cdot x^{-n} = e \cdot x^{-n} = x^{-n} = x^\beta = x^{0+\beta} = x^{\alpha+\beta}$.
În cazul $\alpha = -n$, $\beta = 0$, $n \in N$ se procedează la fel ca în cazul 3.
Cazul 4.

$$\alpha = -n, \ \beta = -m, \ n, \ m \in N.$$

Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{-n} \cdot x^{-m} =$

$= (x^n)^{-1} \cdot (x^m)^{-1} =$ (S-a aplicat definiția puterii de exponent întreg negativ.)

$= (x^m \cdot x^n)^{-1} =$ (S-a folosit relația $a^{-1} \cdot b^{-1} = (b \cdot a)^{-1}$.)

$= (x^{m+n})^{-1} =$

$= (x^{n+m})^{-1} =$ (S-a ținut seama că adunarea numerelor naturale este comutativă.)

$= x^{-(n+m)} =$ (S-a ținut seama de definiția puterii de exponent întreg negativ.)

$= x^{(-n)+(-m)} = x^{\alpha+\beta}$.

Cazul 5. $\alpha = n$, $\beta = -m$, $n, m \in N$.
Dacă $n = m$, atunci
$x^\alpha \cdot x^\beta = x^n \cdot x^{-n} = x^0 = x^{\alpha+\beta}(\alpha + \beta = n + (-n) = 0)$.
Dacă $n > m$, atunci $n = k + m$, unde $k \in N$, $(k = n - m)$ și avem $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{k+m} \cdot x^{-m} = x^k \cdot x^m \cdot x^{-m} = x^k \cdot x^0 = x^k = x^{n-m} = x^{n+(-m)} = x^{\alpha+\beta}$.
Dacă $n < m$, atunci $m = n + k$, unde $k \in N$ $(k = m - n)$ și avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^n \cdot x^{-n-k} = x^n \cdot x^{(-n)+(-k)} = x^n \cdot x^{-n} \cdot x^{-k} = e \cdot x^{-k} = x^{-k} = x^{n-m} = x^{\alpha+\beta}$.

5.2.8. **Simplificarea la stînga și la dreapta.** S-a văzut la capitolul „Legi de compoziție interne" că din $a = b$, rezultă $a \top x = b \top x (a = b \Rightarrow a \top x = b \top x)$, dar din $a \top x = b \top x$, nu rezultă, în general, $a = b$. (Discuția analoagă în cazul cînd se compune x la stînga.)

Vom arăta că într-un grup G are loc și implicația inversă:

$a \top x = b \top x \Rightarrow a = b.$ $\quad (a, b, x \in G).$

Într-adevăr,

$a \top x = b \top x \Rightarrow$

$\Rightarrow (a \top x) \top x' = (b \top x) \top x' \Rightarrow$ (Am compus ambii membri ai egalității cu x', simetricul lui x.)

$\Rightarrow a \top (x \top x') = b \top (x \top x') \Rightarrow$ (S-a folosit asociativitatea.)

$\Rightarrow a \top e = b \top e \Rightarrow$ (S-a folosit proprietatea $x \top x' = e$.)

$\Rightarrow a = b.$ (S-a ținut seama că e este elementul neutru.)

Așadar, $(a \top x = b \top x) \Rightarrow a = b.$

În mod analog, se demonstrează că $(x \top a = x \top b) \Rightarrow (a = b)$.

Deci, *dacă a, b, x sînt elemente ale unui grup a cărui lege de compoziție este notată cu semnul $\top$, avem:*

(1) $(a = b) \Leftrightarrow (a \top x = b \top x)$, *respectiv*

(2) $(a = b) \Leftrightarrow (x \top a = x \top b)$.

Relațiile (1) și (2), în cazul grupului aditiv, devin:

$(a = b) \Leftrightarrow (a + x = b + x)$

$(a = b) \Leftrightarrow (x + a = x + b).$

În cazul grupului multiplicativ relațiile (1) și (2) devin:

$(a = b) \Leftrightarrow (a \cdot x = b \cdot x)$, respectiv

$(a = b) \Leftrightarrow (x \cdot a = x \cdot b).$

5.2.9. **Ecuații într-un grup.** La acest punct ne vom referi la ecuațiile de forma $a \top x = b$, respectiv $x \top a = b$ (coeficienții a și b sînt elemente ale unui grup a cărui lege de compoziție este notată cu semnul $\top$, iar x este necunoscuta, element al aceluiași grup).

Avem:

$a \top x = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a' \top (a \top x) = a' \top b \Leftrightarrow$ (S-a folosit relația 2 de la 5.2.8.)

$\Leftrightarrow (a' \top a) \top x = a' \top b \Leftrightarrow$ (S-a folosit asociativitatea.)

$\Leftrightarrow e \top x = a' \top b \Leftrightarrow$ (S-a ținut seama că $a' \top a = e$.)

$\Leftrightarrow x = a' \top b.$ (S-a ținut seama că e este element neutru).

Așadar, ecuația $a \top x = b$ este echivalentă cu ecuația $x = a' \top b$. Altfel spus, *ecuația $a \top x = b$ are o singură soluție $x = a' \top b$.* În mod analog se arată că *ecuația $x \top a = b$, are o singură soluție $x = b \top a'$.* Ecuațiile $a \top x = b$ și $x \top a = b$ au în general soluții diferite. Dacă grupul este comutativ, cele două ecuații au aceeași soluție.

În cazul grupului aditiv afirmațiile anterioare se transcriu astfel:

Ecuația $a + x = b$ admite o singură soluție $x = (-a) + b$, iar ecuația $x + a = b$ are o singură soluție $x = b + (-a)$.

Dacă grupul este comutativ, atunci cele două ecuații au aceeași soluție $x = (-a) + b = b + (-a)$.

Această proprietate ne permite să introducem într-un grup aditiv comutativ o operație asemănătoare cu scăderea și notată cu semnul $-$, în felul următor: $b - a = b + (-a) = (-a) + b$. Altfel spus, $b - a$ reprezintă soluția ecuației $x + a = b$, respectiv $a + x = b$.

În cazul grupului multiplicativ afirmațiile privitoare la soluțiile ecuațiilor $a \top x = b$ și $x \top a = b$ se transcriu astfel:

Ecuația $a \cdot x = b$ admite o singură soluție $x = a^{-1} \cdot b$, iar ecuația $x \cdot a = b$ admite o singură soluție $x = b \cdot a^{-1}$.

Dacă grupul este comutativ, atunci cele două ecuații au aceeași soluție $x = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$. Această proprietate ne permite să introducem într-un grup multiplicativ comutativ o operație asemănătoare cu împărțirea notată cu semnul: sau linia de fracție, în felul următor:

$b : a = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$, sau folosind notația cu linia de fracție, $\frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$.

5.2.10. **Izomorfism. Omomorfism (de grup).** Există un număr foarte mare de exemple de grupuri. Aceste grupuri au multe trăsături comune, provenite din faptul că toate au aceeași structură (de grup), dar între ele există în general și unele deosebiri provenite din natura diferită a elementelor lor. Aceste deosebiri pot fi însă neesențiale.

Se consideră *identice* din punct de vedere algebric două grupuri, de natură diferită, atunci cînd elementele lor se pot asocia două cîte două, astfel încît orice „relație algebrică" între elementele primului grup să fie adevărată simultan cu relația obținută înlocuind elementele primului grup cu cele asociate din grupul al doilea.

Exemplu. Fie grupul G al claselor de resturi modulo 4 și grupul G' definit de înmulțire pe mulțimea $\{1, i, -1, -i\}$. (Se verifică fără dificultate că mulțimea $\{1, i, -1, -i\}$ înzestrată cu operația de înmulțire este grup.)

Tabelele legilor de compoziție sînt următoarele:

pentru G

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

pentru G'

$\bullet$	1	i	-1	$-$i
1	1	i	-1	$-$i
i	i	-1	$-$i	1
-1	-1	$-$i	1	i
$-$i	$-$i	1	i	-1

Asociem elementele celor două grupuri în felul următor: $\hat{0}$ cu 1, $\hat{1}$ cu i, $\hat{2}$ cu -1, $\hat{3}$ cu $-$i. Să notăm elementele asociate cu același semn. În felul următor:

$\hat{0}$, respectiv 1, cu a

$\hat{1}$, respectiv i, cu b

$\hat{2}$, respectiv -1, cu c

$\hat{3}$, respectiv $-$i, cu d.

Tabelele celor două grupuri devin:

pentru G

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

pentru G'

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Se constată că deși grupurile sînt formate din obiecte diferite, de data aceasta notate la fel, se obține același tabel. Deci orice relație între elementele primului grup — definită cu ajutorul tabelului respectiv — este adevărată simultan cu relația corespunzătoare între elementele din grupul al doilea — definită cu ajutorul tabelului respectiv, căci cele două tabele sînt identice.

Se spune în acest caz că cele două grupuri sînt *izomorfe* și se consideră identice din punct de vedere algebric.

Să analizăm procedeul prin care am identificat cele două grupuri.

a) Întîi s-a asociat oricărui element din primul grup, un element și numai unul din al doilea grup astfel încît orice element din al doilea grup să fie asociat cu unul și numai unul din primul grup.

Cu alte cuvinte s-a găsit o funcție $f : G \to G'$, bijectivă, care este definită astfel: $f(\hat{0}) = 1$, $f(\hat{1}) = $ i, $f(\hat{2}) = -1$, $f(\hat{3}) = -$i.

b) S-au notat elementele care se corespund prin f cu aceleași semne și s-au obținut tabelele identice. Să vedem ce proprietate trebuie să aibă funcția f, pentru a fi posibil acest lucru.

Să presupunem că legea grupului G este notată cu semnul $\top$, iar legea grupului G' este notată cu semnul $\perp$. Să considerăm $x \in G$, $y \in G$. Fie $z = x \top y$. Elementelor x, y, z le corespund prin f, elementele $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$. Elementele care se corespund să le notăm cu aceleași semne, astfel:

x, $f(x)$ cu a,
y, $f(y)$ cu b,
z, $f(z)$ cu c.

Elementul $f(x) \perp f(y)$ îl notăm cu d.

Reținînd din tabelul grupului G linia elementului x și coloana elementului y, avem pentru G:

$\top$	y
	$\vdots$
x	$\ldots\ldots z = x \top y$

, respectiv

$\top$	b
	$\vdots$
a	$\ldots\ldots c$

În G' avem:

$\perp$	$f(y)$
	$\vdots$
$f(x)$	$\ldots\ldots f(x) \perp f(y)$

, respectiv

$\perp$	b
	$\vdots$
a	$\ldots\ldots d$

Tabelul

$\top$	b
	$\vdots$
a	$\ldots\ldots c$

trebuie să fie identic

cu tabelul

$\perp$	b
	$\vdots$
a	$\ldots\ldots d$

Așadar, c trebuie să fie

identic cu d. Dar în G', c reprezintă pe $f(z)$, iar d pe $f(x) \perp f(y)$. Deci trebuie să avem

$$f(z) = f(x) \perp f(y), \text{ adică } f(x \top y) = f(x) \perp f(y).$$

Aşadar funcţia $f : G \to G'$ este caracterizată de următoarele proprietăţi:

a) este bijectivă,
b) $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$.

DEFINIŢIE. Fie G un grup a cărui lege este notată cu $\top$ şi G' un grup a cărui lege este notată cu $\perp$. O aplicaţie $f: G \to G'$ se numeşte izomorfism dacă:

a) este bijectivă.
b) $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$.

Dacă între grupurile G şi G' există un izomorfism, atunci se spune că cele două grupuri sînt izomorfe, şi se consideră identice din punct de vedere algebric.

O aplicaţie $f : G \to G'$ se numeşte omomorfism, dacă este îndeplinită numai condiţia (b).

Noţiunea de omomorfism joacă un rol foarte important în studiul structurilor algebrice. Limitele materiei conţinute în acest manual nu ne permit, însă, să punem în evidenţă importanţa acestei noţiuni.

Dacă legile grupurilor G şi G' sînt notate ambele multiplicativ, respectiv aditiv, atunci egalitatea (b) devine:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \text{ respectiv } f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Dacă legea grupului G este notată aditiv, iar legea grupului G' este notată multiplicativ, atunci relaţia (b) devine:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

Dacă legea grupului G este notată multiplicativ, iar legea grupului G' este notată aditiv, relaţia (b) devine:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Un izomorfism $f : G \to G$ se numeşte un automorfism.
Un exemplu de automorfism este aplicaţia identică.

Exemplu: *Grupul aditiv al numerelor reale este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive.*

Într-adevăr funcţia exponenţială ($f : R \to R_+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$) este un izomorfism, căci $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$.

TEOREMĂ. Fie G şi G' două grupuri a căror lege este notată multiplicativ, avînd element neutru pe e, respectiv e'.
Dacă $f : G \to G'$ este un izomorfism, atunci:
(1) $f(e) = e'$ (imaginea elementului neutru din primul grup este element neutru, în cel de-al doilea grup).
(2) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ (imaginea simetricului lui x, este simetricul imaginii lui x.

Demonstraţie

(1) Fie $x' \in G'$. Aplicaţia f, fiind surjectivă există $x \in G$, astfel încît $f(x) = x'$.
Avem $x' \cdot f(e) = f(x) \cdot f(e) = f(x \cdot e) = f(x) = x'$.
Analog se arată că $f(e) \cdot x' = x'$ şi deci $f(e)$ este element neutru.
Demonstraţia egalităţii (2) o propunem ca exerciţiu.

Inele

5.2.11. Adunarea şi înmulţirea determină pe mulţimea Z a numerelor întregi, o structură algebrică caracterizată de următoarele proprietăţi:

a) Adunarea determină pe Z o structură de grup comutativ.
b) Înmulţirea este asociativă şi comutativă.
c) Există element neutru faţă de înmulţire (numărul 1).
d) Înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Există exemple de mulţimi înzestrate cu două legi de compoziţie (adunarea şi înmulţirea) astfel încît, înmulţirea nu este comutativă (mulţimea matricelor pătrate de ordinul n) sau nu există element unitate (mulţimea numerelor pare), cele două legi de compoziţie avînd celelalte proprietăţi menţionate în cazul numerelor întregi.

DEFINIŢIE. Două legi de compoziţie, prima notată aditiv şi a doua multiplicativ, definesc pe o mulţime I o structură de inel dacă:

Grup aditiv comutativ

A_p	**Adunarea este peste tot definită.**
A_A	**Adunarea este asociativă, adică,** $(x + y) + z = x + (y + z)$, **oricare ar fi,** $x, y, z \in I$.
A_c	**Adunarea este comutativă, adică** $x + y = y + x$, **oricare ar fi** $x, y \in I$.
A_N	**Există** $0 \in I$, **astfel încît** $0 + x = x$, **oricare ar fi** $x \in I$.
A_s	**Oricărui element** $x \in I$, **i se poate asocia un element** $-x \in I$, **astfel încît** $x + (-x) = 0$.

M_p **Înmulțirea este peste tot definită.**

M_A **Înmulțirea este asociativă, adică** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, **oricare ar fi** $x, y, z \in I$.

D_{MA} **Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică, oricare ar fi** $x, y, z \in I$, **avem:**

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z),$$
$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

Dacă înmulțirea este comutativă se spune că inelul este *comutativ*. Dacă există element neutru față de înmulțire se spune că inelul este *cu element unitate*.

5.2.12. **Exemple.** a) *Inele numerice*

Adunarea și înmulțirea determină pe următoarele mulțimi de numere o structură de inel:

1) mulțimea Z a numerelor întregi (inelul numerelor întregi, inel comutativ cu element unitate),

2) mulțimea numerelor întregi pare (inel comutativ, fără element unitate),

3) mulțimea Q respectiv R, C a numerelor raționale respectiv reale, complexe (inele comutative cu element unitate).

b) *Mulțimea matricelor pătrate din ordinul n* (inel necomutativ, cu element unitate).

c) *Clase de resturi.* Adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural n o structură de inel comutativ, cu element unitate.

5.2.13. **Înmulțirea cu 0. Divizori ai lui 0**

Într-un inel I, **dacă cel puțin unul din factorii unui produs este 0, atunci produsul este egal cu 0, adică**

$$a \cdot 0 = 0, \quad \textbf{respectiv} \quad 0 \cdot a = 0 \qquad (a \in I).$$

Într-adevăr, avem:

$a(0 + 0) = a \cdot 0$ (căci $0 + 0 = 0$) și $a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ (distributivitatea) și deci $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Notînd $a \cdot 0$ cu x, avem $x = x + x$ și adunînd, la stînga pe $-x$, obținem $(-x) + x = (-x) + (x + x)$, de unde $0 = x$, adică $a \cdot 0 = 0$.

Egalitatea $0 \cdot a = 0$ se demonstrează la fel.

Reciproca afirmației demonstrate nu este adevărată în orice inel, mai precis, *există inele în care produsul a două (sau mai multe elemente) este egal cu 0, fără ca nici unul din factori să fie 0.*

Exemplu: 1) În inelul claselor de resturi modulo 12, avem:

$$\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$$
$$\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{0} \qquad (\hat{3} \neq \hat{0}, \quad \hat{4} \neq \hat{0})$$

Un element $d \neq 0$ *al unui inel* I *se numește divizor al lui 0, dacă există un element* $d' \neq 0$ *astfel încît:*

$$d \cdot d' = 0 \text{ sau } d' \cdot d = 0.$$

În inelul claselor de resturi modulo 12 elementele $\hat{3}$ și $\hat{4}$ sînt divizori ai lui $\hat{0}$.

Orice inel numeric (față de adunarea și înmulțirea curentă) nu are divizori ai lui 0. Într-adevăr, în cazul numerelor, dacă un produs este egal cu 0, atunci cel puțin unul din factori este egal cu 0.

2) Inelul matricelor pătrate de ordinul n ($n \geqslant 2$) are divizori ai lui 0. Verificăm afirmația în cazul matricelor pătrate de ordinul 2.

Fie $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ și $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ două matrice de ordinul 2 nenule.

Se verifică, fără dificultate, că $A \cdot B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.2.14. **Regula semnelor într-un inel.** În cazul numerelor, regula semnelor la înmulțire se reduce la următoarele relații:

a) $$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b),$$

b) $$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Vom arăta acum că aceste egalități sînt adevărate în orice inel. Avem:

$$[a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0 \text{ (Înmulțirea cu 0; 5.2.13.)}$$

Aplicînd distributivitatea avem:

$$[a + (-a)] \cdot b = (a \cdot b) + (-a) \cdot b. \text{ Deci,}$$

$(a \cdot b) + (-a) \cdot b = 0$ și adunînd la stînga pe $-(a \cdot b)$ obținem:

$$-(a \cdot b) + [(a \cdot b) + (-a) \cdot b] = -(ab), \text{ de unde}$$
$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

În mod analog se verifică egalitatea $a(-b) = -(a \cdot b)$.

Pentru a verifica egalitatea (b) punem $-b = x$.

Avem: $(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot x = -(a \cdot x) = -[a(-b)] = -[-(a \cdot b)] = a \cdot b$.

Dacă inelul este cu element unitate, atunci $(-1)x = -x$. Într-adevăr $(-1)x = -(1 \cdot x) = -x$.

5.2.15. **Simplificarea la stînga și la dreapta într-un inel fără divizori ai lui 0.** Fie un inel I fără divizori ai lui 0, $a \in I$, $x \in I$, $y \in I$ și $a \neq 0$. Din egalitatea $ax = ay$ rezultă $x = y$. (Se spune în acest caz că egalitatea $ax = ay$ se poate simplifica la stînga, cu $a \neq 0$.)

Într-adevăr, din $ax = ay$, rezultă prin adunare la dreapta a elementului $-ay$:

$ax + (-ay) = (ay) + (-ay)) = 0$. Cum $-(ay) = a(-y)$, avem: $ax + a \cdot (-y) = a \cdot (x + (-y)) = 0$. Inelul I, fiind fără divizori ai lui 0 și $a \neq 0$, rezultă $x + (-y) = 0$, de unde, adunînd la dreapta elementul y, obținem $x = y$.

În mod analog, se poate arăta că
$(xa = ya$ și $a \neq 0) \Rightarrow x = y$. (Se spune în acest caz că egalitatea $xa = ya$ se poate simplifica la dreapta cu a.)

5.2.15. **Reguli de calcul într-un inel.** *Reguli care rezultă din proprietatea unui inel de a fi grup comutativ față de adunare.*

Un inel I fiind grup comutativ față de adunare, avem:

$-(-x) = x(1)$, $x \in I$ (5.2.4. (d))

$-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) \ldots + (-x_n)$ (2), $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ (5.2.6).

Pentru simplificarea scrierii se face convenția să se scrie $x - y$ în loc de $x + (-y)$, $-x + y$ în loc de $(-x) + y$, $-x - y$ în loc de $(-x) + (-y)$. Cu această convenție, relația (2) devine

$$-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = -x_1 - x_2 - x_3 \ldots - x_n.$$

În cazul numerelor reale regăsim regula prin care se afirmă că „minus în fața unei paranteze schimbă semnul tuturor termenilor". Această regulă, foarte frecvent utilizată în algebra elementară, rezultă, așadar, din proprietatea mulțimii numerelor reale de a fi grup comutativ față de adunare. Iată și alte situații uzuale, din algebra elementară, care se justifică prin proprietatea numerelor reale de a forma grup comutativ față de adunare.

$$a - (b - c) = a - b - (-c) = a - b + c$$
$$a - (b - c - d) = a - b - (-c) - (-d) = a - b + c + d \quad \text{etc.}$$

Înmulțirea unei sume cu o altă sumă.

Toate elementele care intervin în relațiile ce urmează se presupun dintr-un inel I.

Avem:

$$a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n \qquad (1)$$

respectiv
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)a = x_1a + x_2a + \ldots + x_na. \qquad (1')$$

Într-adevăr, dacă facem notațiile: $x_2 + \ldots + x_n = y_1$, $x_3 + x_4 + \ldots + x_n = y_2, \ldots, x_{n-1} + x_n = y_{n-1}$, atunci, aplicînd distributivitatea, obținem succesiv:

$$a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a(x_1 + y_1) =$$
$$= ax_1 + ay_1 = ax_1 + a(x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= ax_1 + a(x_2 + y_3) = ax_1 + ax_2 + ay_3 = \ldots =$$

$= ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n$. În mod analog se verifică egalitatea

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)a = x_1a + x_2a + \ldots + x_na.$$

Avem:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= a_1x_1 + a_2x_1 + \ldots + a_mx_1 +$$
$$a_1x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_2 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1x_n + a_2x_n + \ldots + a_mx_n.$$

Această relație se poate scrie cu ajutorul simbolului Σ astfel

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_l\right).$$

Pentru demonstrație, să punem $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = a$.

Avem:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)x_1 +$$
$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)x_2 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)x_n =$$
$$= a_1x_1 + a_2x_1 + \ldots + a_mx_1 +$$
$$+ a_1x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_2 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_1x_n + a_2x_n + \ldots + a_mx_n.$$

Dăm acum cîteva situații uzuale, în algebra elementară, în care regulile de calcul (cu numere reale) se justifică prin proprietățile menționate:

$$(a + b)(x + y + z) = ax + bx + ay + by + az + bz$$
$$(a - b)(x - y + z - t) = ax + (-b)x + a(-y) + (-b) \cdot (-y) +$$
$$+ az + (-b)z + a(-t) + (-b) \cdot (-t) =$$
$$= ax - bx - ay + by + az - bz - at + bt.$$

Calculul cu polinoame, avînd coeficienți într-un inel comutativ.

Înmulțirea fiind asociativă, într-un inel sînt adevărate egalitățile: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ și $(x^n)^m = x^{nm}$ (5.2.5).

Fie a_0, a_1, b_0, b_1 și x, elemente dintr-un inel I.

Avem:

$$(a_0x + a_1)(b_0x + b_1) = a_0xb_0x + a_1b_0x + a_0xb_1 + a_1b_1.$$

Se observă că dacă înmulțirea nu este comutativă, atunci scrierea rezultatului, ca o sumă de termeni, după puterile descrescătoare ale lui x, nu este posibilă. Dacă înmulțirea este comutativă, atunci avem:

$$(a_0x + a_1)(b_0x + b_1) = a_0b_0xx + a_1b_0x + a_0b_1x + a_1b_1 =$$
$$= a_0b_0x^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + a_1b_1.$$

Regulile de calcul folosite la calculul produselor de polinoame cu coeficienți din mulțimea numerelor reale (sau complexe) se justifică prin aceea că mulțimea numerelor reale (respectiv, mulțimea numerelor complexe) formează inel comutativ.

Dăm acum cîteva situații uzuale din calculul cu polinoame care se justifică, pe baza regulilor de calcul într-un inel comutativ.

(1) $$(a_0x^2 + a_1x + a_2)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) = a_0b_0x + (a_0b_1 + a_1b_0)x^4 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^3 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)x^2 + (a_1b_3 + a_2b_2)x + a_2b_3$$

(2) $$(ax^2 - b)(cx^2 - d) = acx^4 - (bc + ad)x^2 + bd.$$

5.2.17. **Inele pe polinoame cu coeficienți numerici.** Fie $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi, respectiv raționali, reali, complecși.

În aceste mulțimi adunarea și înmulțirea determină o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0 căci:

A_P. Suma a două polinoame cu coeficienți întregi, respectiv raționali, reali sau complecși, este un polinom cu coeficienți întregi respectiv raționali, reali sau complecși.

A_A. Adunarea polinoamelor este asociativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$, $Q(x)$ și $R(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$ sau $C[x]$, avem

$$[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)].$$

A_C. Adunarea este comutativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$ sau $C[x]$ avem:

$$P(x) + O(x) = Q(x) + P(x).$$

A_N. În $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ există element neutru față de adunare. Acesta este polinomul nul P^* ($P^*(x) = 0$):

$$P(x) + P^* = P(x).$$

A_S. Oricare polinom $P(x)$ cu coeficienți întregi respectiv raționali, reali, complecși, admite un opus, polinomul $-P(x)$ care este un polinom cu coeficienți întregi, respectiv raționali, reali, complecși. Avem:

$$P(x) + (-P(x)) = P^*.$$

Așadar, adunarea determină pe $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ o structură de grup comutativ.

M_P. Produsul a două polinoame din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ este un polinom din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$.

M_A. Înmulțirea este asociativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ avem:

$$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)].$$

Înmulțirea este comutativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ avem:

$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x).$$

În $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$, polinomul identificat cu numărul 1 este element unitate față de înmulțire, căci $P(x) \cdot 1 = P(x)$, oricare ar fi $P(x)$.

D_{MA}. Înmulțirea este distributivă față de adunare, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$, avem:

$$P(x)[Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x).$$

Proprietățile enumerate arată că adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$, o structură de inel comutativ cu element unitate.

Să demonstrăm acum că în $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ nu există divizori ai lui 0.

Fie două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ diferite de polinomul nul. În acest caz cele două polinoame pot fi scrise sub forma $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$, cu $a_0 \neq 0$ și $Q(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$, cu $b_0 \neq 0$.

Avem:

$P(x) \cdot Q(x) = a_0b_0x^{n+m} + \ldots + a_nb_m$ și cum în Z, respectiv Q, R, C nu avem divizori ai lui 0, rezultă $a_0b_0 \neq 0$ și deci polinomul $P(x) \cdot Q(x)$ nu poate fi polinomul nul.

Consecință. Dacă $P(x) \neq P^*$, atunci:

$P(x) \cdot Q(x) = P(x) \cdot R(x) \Rightarrow Q(x) = R(x)$ (v. 5.2.15).

Observare. Faptul că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi, respectiv raționali, reali, complecși, o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0, rezultă din proprietatea mulțimii din care se consideră coeficienții de a forma inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0, căci operațiile cu polinoame se reduc la operații cu coeficienții acestora.

5.2.18. **Izomorfism. Omomorfism (de inel).** Motive analoage cu cele expuse la 5.2.10 au dus la necesitatea găsirii unor criterii după care să se identifice, din punct de vedere algebric, două inele.

DEFINIȚIE. Fie I și I' două inele. O aplicație: $I \to I'$ se numește izomorfism dacă:

a) f este bijectivă,

b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

c) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Dacă între inelele I și I' există un izomorfism, atunci se spune că acestea sînt izomorfe și se consideră identice, din punct de vedere algebric.

O aplicație: $f : I \to I'$, *se numește omomorfism dacă îndeplinește condițiile* (b) și (c).

Exemple de inele izomorfe vor fi date la exerciții.

Din definiția izomorfismului, rezultă imediat următoarele consecințe:

(1) $f(0) = 0$.

(2) *Dacă inelul* I *admite ca element unitate pe* 1, *atunci* $f(1)$ *este element unitate în* I'.

(3) *Dacă inelul* I *este comutativ, atunci și inelul* I' *este comutativ.*

(4) $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$.
În particular, $f(nx) = nf(x)$.

(5) $f(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$.
În particular, $f(x^n) = [f(x)]^n$.

Demonstrația propozițiilor (2), (3), (4), (5) le propunem ca exerciții.

Corpuri

5.2.19. S-a văzut că adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea numerelor raționale o structură de inel, cu element unitate.

În inelul numerelor raționale, orice element diferit de 0 este inversabil. (Inversul numărului rațional $x = \frac{a}{b}$ este numărul rațional $x^{-1} = \frac{b}{a}$; $x \cdot x^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$).

Această proprietate nu are loc în inelul numerelor întregi (în inelul numerelor întregi singurele elemente inversabile sînt 1 și -1).

Observații. 1) Dacă într-un inel cu element unitate, avem $0 = 1$, atunci $E = \{0\}$. Într-adevăr, fie $x \in E$. Avem:

$x \cdot 1 = x$ (1 fiind element unitate).

$x \cdot 0 = 0$ (înmulțirea cu 0 într-un inel).

Dar $1 = 0$ și deci $x \cdot 1 = x \cdot 0$ de unde $x = 0$.

2) Într-un inel cu element unitate, dacă $E \neq \{0\}$, atunci 0 nu este inversabil.

Într-adevăr, să presupunem, contrariul, că 0 este inversabil și să notăm cu 0^{-1} inversul lui 0.

Avem: $0 \cdot 0^{-1} = 1$ și

$0 \cdot 0^{-1} = 0$ (înmulțirea cu 0 într-un inel).

Așadar, $0 = 1$, și deci $E = \{0\}$ (observația 1) ceea ce contrazice ipoteza $E \neq \{0\}$.

DEFINIȚIE: Două legi de compoziție, prima notată aditiv iar a doua notată multiplicativ, determină pe o mulțime K o structură de corp dacă:

Inel cu element unitate

Grup aditiv comutativ

A_P. **Adunarea este peste tot definită.**

A_A. **Adunarea este asociativă, adică:** $(x + y) + z = x + (y + z)$, **oricare ar fi** $x, y, z \in K$.

A_G. **Adunarea este comutativă, adică:** $x + y = y + x$, **oricare ar fi** $x, y \in K$.

A_N. **Există** $0 \in K$, **astfel încît:** $0 + x = x$ **(respectiv** $x + 0 = x$**), pentru orice** $x \in K$.

A_S. **Pentru orice** $x \in K$, **există** $-x \in K$, **astfel încît:** $x + (-x) = 0$ **(respectiv** $-x + x = 0$**).**

M_P. **Înmulțirea este peste tot definită.**

M_A. **Înmulțirea este asociativă, adică** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, **oricare ar fi** $x, y, z \in K$.

M_N. **Există** $1 \in K$, **astfel încît:** $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, **oricare ar fi** $x \in K$.

D_{MA}. **Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică:** $x \cdot (y + z) = xy + xz$ $(y + z) \cdot x = yx + zx$, **oricare ar fi** $x, y, z \in K$.

M_S. **Pentru orice** $x \neq 0$ **din** K **există** $x^{-1} \in K$ **astfel încît:** $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

— **Dacă înmulțirea este comutativă, adică:** $x \cdot y = y \cdot x$, **oricare ar fi** $x, y \in K$, **corpul se numește** *comutativ*.

Observare. Se admite că un corp conține cel puțin două elemente (distincte): 0 și 1.

5.2.20. **Exemple.** 1. Adunarea și înmulțirea definesc o structură de corp pe următoarele mulțimi:

a) Mulțimea numerelor raționale Q *(corpul numerelor raționale.* Acest corp este comutativ).

b) Mulțimea numerelor reale *(corpul numerelor reale.* Acest corp este comutativ).

c) Mulțimea numerelor complexe (corpul numerelor complexe. Acest corp este comutativ). Într-adevăr, se știe că adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea numerelor complexe o structură algebrică de inel cu element unitate.

Dacă $z = a + bi$ ($z \in C$ și $z \neq 0$), atunci $z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}$ i și $z \cdot z^{-1} = 1$.

2) Adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural p prim, o structură de corp, corpul claselor de resturi modulo p. Într-adevăr, adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural o structură de inel cu element unitate. Dacă se consideră clasele de resturi modulo un număr natural prim, atunci orice element diferit de 0 este inversabil.

Corpul claselor de resturi modulo p este un corp comutativ.*

5.2.21. **Lipsa divizorilor lui 0.** Corpul fiind o structură algebrică particulară de inel, într-un corp au loc toate proprietățile care au loc într-un inel.

Într-un corp K nu există divizori ai lui 0.

Altfel spus, *produsul a două elemente dintr-un corp, diferite de* 0, *este un element diferit de* 0.

Într-adevăr, să presupunem contrariul, că într-un corp există două elemente $a \neq 0$ și $b \neq 0$ astfel încît $a \cdot b = 0$.

Avem:

	$a \cdot b = 0$.
$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$	(S-a înmulțit la stînga cu a^{-1}. Elementul a fiind diferit de 0 este inversabil.)
$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 0$	(S-a folosit asociativitatea înmulțirii.)
$1 \cdot b = a^{-1} \cdot 0$	(S-a utilizat relația $a^{-1} \cdot a = 1$.)
$b = a^{-1} \cdot 0$	(S-a folosit faptul că 1 este elementul unitate.)
$b = 0$	(Înmulțirea cu 0 într-un inel.)

Egalitatea $b = 0$ contrazice ipoteza $b \neq 0$.

Așadar, un produs de elemente dintr-un corp este 0, dacă și numai dacă cel puțin un factor este $0 : (a \cdot b) = 0) \Leftrightarrow (a = 0$ sau $b = 0)$.

Un inel în care există divizori ai lui 0, nu este corp.

5.2.22. **Altă definiție a corpului.** Dacă adunarea și înmulțirea definesc pe o mulțime K o structură de corp, atunci înmulțirea definește pe mulțimea $K \setminus \{0\}$ o structură de grup multiplicativ.

* Se poate demonstra că orice corp finit (un corp definit pe o mulțime finită) este comutativ (Teorema lui Wedderburn).

Într-adevăr,

P_M. Înmulțirea este peste tot definită în mulțimea $K \setminus \{0\}$. (Produsul a două elemente diferite de 0 este un element diferit de 0.)

P_A. Înmulțirea este asociativă.

P_N. Există element unitate.

P_S. Orice element diferit de 0 (din $K \setminus \{0\}$) este inversabil.

Cu această observație, putem formula definiția corpului și astfel:

> Două legi de compoziție, una notată aditiv și alta notată multiplicativ, determină pe o mulțime K o structură de corp, dacă:
> *a*) Adunarea determină pe K o structură de grup comutativ.
> *b*) Înmulțirea determină pe $K \setminus \{0\}$ o structură de grup.
> *c*) Înmulțirea este distributivă față de adunare.

5.2.23. **Fracții într-un corp comutativ.** Dacă într-un corp comutativ, facem notația $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, respectiv $\frac{a}{b} = b^{-1} \cdot a$ ($b \neq 0$) (aceste notații sînt sugerate de cele folosite la numere, unde $a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$) atunci putem efectua cu elementele sale calcule analoage cu cele de la fracții.

Avem:

$$a = \frac{a}{1} \qquad \text{a)}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{(c)}$$

În particular, $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d}$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \cdot \qquad \text{(d)}$$

În particular, $\frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{c}$, $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}, \ \alpha \in Z \qquad \text{(e)}$$

Demonstrăm numai relațiile (a) și (b).

a) Avem: $\frac{a}{1} = a \cdot (1)^{-1} = a \cdot 1 = a.$

b) Avem:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a, \quad \frac{c}{d} = c \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot c,$$

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} =$$

$= (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) =$ (S-a folosit relația $(b \cdot d)^{-1} = d^{-1} \cdot b^{-1}$)

$= (a \cdot d) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) + (b \cdot c) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) = a \cdot d \cdot d^{-1} \cdot b^{-1} + b \cdot b^{-1}.$ (S-a folosit distributivitatea.)

$\cdot c \cdot d^{-1} = a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} =$ (S-a ținut seama că înmulțirea este asociativă și comutativă.)

$= \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ (S-au folosit relațiile $d \cdot d^{-1} = 1$ și $b \cdot b^{-1} = 1$ și s-a utilizat proprietatea elementului neutru.)

5.2.24. **Izomorfism. Omomorfism (de corp).**

DEFINIȚIE. Fie K și K' două corpuri. O aplicație $f: K \to K'$ se numește izomorfism, dacă:

a) f este bijectivă,
b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
c) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Dacă între corpurile K și K' există un izomorfism, atunci se spune că cele două corpuri sînt izomorfe și se consideră identice din punct de vedere algebric.

O aplicație $f: K \to K'$ se numește omomorfism dacă îndeplinește condițiile b) și c).

Exemple de corpuri izomorfe, vor fi date la exerciții.

Un izomorfism $f: K \to K$ se numește automorfism.

Exerciții

Exemple de legi de compoziție

1. Fie mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Notăm cu $x \top y$, cel mai mare divizor comun al numerelor x și y ($x \in E$, $y \in E$).

a) Corespondența $(x, y) \to x \top y$ definește o lege de compoziție în E.

Să se întocmească tabelul legii de compoziție. Este această lege peste tot definită?

b) Să se verifice că: $(2 \top 3) \top 6 = 2 \top (3 \top 6)$.

c) Să se calculeze: $[(4 \top 6) \top 4] \top (4 \top 2)$.

d) Să se rezolve ecuațiile: $x \top 6 = 2$, $x \top 3 = 3$, $x \top 5 = 5$.

2. Fie mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Notăm cu $x \top y$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y ($x \in E$, $y \in E$).

a) Corespondența $(x, y) \to x \top y$ definește o lege de compoziție în E. Să se întocmească tabelul legii de compoziție. Este această lege peste tot definită?

3. Fie mulțimea $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $x \top y = |x - y|$ ($x \in E$, $y \in E$).

a) Să se întocmească tabelul legii de compoziție. Este această lege de compoziție peste tot definită?

b) Este adevărată afirmația: „$(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$ oricare ar fi x, y, z din E“?

c) Este adevărată afirmația: „$x \top y = y \top x$, oricare ar fi x, y din E“?

d) Să se rezolve ecuația $(x \top 2) \top 3 = 1$.

4. Fie mulțimea $E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right\} = \left\{x \in R \,\middle|\, x = \frac{1}{2^n}, \; n \in N\right\}$.

a) Este înmulțirea peste tot definită în E?

b) Este adunarea peste tot definită în E?

5. Să se precizeze dacă adunarea, respectiv scăderea este sau nu este peste tot definită în următoarele mulțimi: N, Z, Q, R, C, Q_+, R_+, $Z \setminus \{0\}$, $Q \setminus \{0\}$, $R \setminus \{0\}$, $C \setminus \{0\}$.

6. Să se precizeze dacă înmulțirea, respectiv împărțirea, este sau nu peste tot definită în următoarele mulțimi: N, Z, Q, R, C, Q_+, R_+, $Z \setminus \{0\}$, $Q \setminus \{0\}$, $R \setminus \{0\}$, $C \setminus \{0\}$.

7. Fie M mulțimea permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Să se rezolve ecuațiile:

$$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; X \in M.$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; Y \in M.$$

8. a) Să se întocmească tabelele adunării și înmulțirii în mulțimea claselor de resturi modulo 7.

b) Să se rezolve ecuațiile

1) $x + \hat{3} = \hat{0}$ 2) $\hat{3} \cdot x = \hat{1}$.

c) Să se verifice, că dacă $x \neq \hat{0}$ egalitatea $x^7 = x$ este o identitate.

9. În mulțimea R a numerelor reale fie $x \top y = x + y + 5$ și $x \perp y = x^2 + y^2$.

a) Să se calculeze $3 \top 5$ și $2 \top 4$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x \top y = 8 \\ (x \perp 3) \top (y \top 2) = 23. \end{cases}$$

10. Fie M mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi de forma $\begin{Vmatrix} x & y \\ 2y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$. Să se arate că în mulțirea este peste tot definită în M. Adunarea este peste tot definită în M?

11. Fie $M = \{x \in R \mid x = a + b\sqrt{5},\ a \in Q,\ b \in Q,\ a^2 - 5b^2 = 1\}$.
Să se arate că înmulțirea în M este peste tot definită.

12. Fie în mulțimea $[3, +\infty)$ legea de compoziție $x \top y = xy - 3(x + y) + 12$. Să se arate că legea $\top$ este peste tot definită.

13. Fie F_3 mulțimea funcțiilor strict crescătoare definite pe R cu valori în R.

a) Să se arate că adunarea este peste tot definită în F_c.

b) Înmulțirea este peste tot definită în F_c?

Asociativitate

14. Se știe că în cazul unei legi de compoziție asociative compusul a patru, cinci sau mai multe elemente nu depinde de așezarea parantezelor (5.1.16).

Să se verifice că în cazul unei legi de compoziție între elementele unei mulțimi M, asociative, notate cu semnul $\top$ avem:

a) $[(a \top b) \top c] \top d = a \top [(b \top c) \top d]$.

b) $[(a \top b) \top c] \top (d \top e) = \{a \top [(b \top c) \top d]\} \top e$.

(Literele a, b, c, d, e reprezintă elemente din M.)

15. Fie $E = \{e, a, b, c, d, f, g\}$ și legea de compoziție dată în tabelul:

$\top$	e	a	b	c	d	f	g
e	e	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g	e
b	b	c	d	f	g	e	a
c	c	d	f	g	e	a	b
d	d	f	g	e	a	b	c
f	f	g	e	a	b	a	d
g	g	e	a	b	c	d	f

a) Să se verifice că:

$$a \top (a \top b) = (a \top a) \top b,$$
$$a \top (b \top c) = (a \top b) \top c,$$
$$b \top (c \top d) = (b \top c) \top d.$$

b) Este legea — asociativă?

16. În mulțimea R a numerelor reale definim o lege de compoziție notată cu semnul $\top$ în felul următor:

$$x \top y = 6xy + 3x + 3y + 1.$$

a) Să se calculeze $\frac{3}{4} \top 2$.

b) Să se verifice că legea $\top$ este asociativă.

c) Să se arate că există un element e aparținînd lui R astfel încît $x \top e = x$, oricare ar fi $x \in E$.

d) Să se rezolve ecuația:

$$a \top x = e.$$

17. În mulțimea R a numerelor reale punem

$$\max.(x, y) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geqslant y \\ y, \text{ dacă } y > x \end{cases} \text{ și } \min.(x, y) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \leqslant y \\ y, \text{ dacă } y < x \end{cases}.$$

Legea de compoziție $x \top y = \max.(x, y)$ este asociativă?

Dar legea $x \perp y = \min.(x, y)$?

18. Fie F mulțimea funcțiilor definite pe R cu valori în R și funcțiile $f, g, h \in F$ definite astfel: $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = \sin(x + 1)$, $h(x) = \ln(x^2 + 1)$. Să se verifice prin calcul direct că $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

19. Fie M mulțimea permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ și permutările $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Să se verifice prin calcul direct că $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

20. Fie M mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi în care considerăm matricele $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Să se verifice prin calcul direct că $(A + B) + C = A + (B + C)$ și $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

21. Să se demonstreze că adunarea vectorilor de poziție este asociativă.

22. În mulțimea claselor de resturi modulo 12 să se verifice egalitățile:

$$(\hat{8} + \hat{9}) + \hat{11} = \hat{8} + (\hat{9} + \hat{11}) \text{ și } (\hat{8} \cdot \hat{9}) \cdot \hat{11} = \hat{8} \cdot (\hat{9} \cdot \hat{11}).$$

Comutativitate

23. Se știe că în cazul unei legi de compoziție asociative și comutative, compusul a trei sau mai multe elemente nu depinde de așezarea parantezelor și ordinea elementelor (5.1.19).

a) Să se verifice, urmîndu-se toate etapele, că în cazul unei legi $\top$ asociative și comutative avem:

$$(a \top b) \top (c \top d) = [b \top (d \top a)] \top c.$$

24. Să se calculeze, urmîndu-se toate etapele:

a) $$[A \cup (B \cup A)] \cup [B \cup (B \cup A)],$$

b) $$[(A \cap B) \cap B] \cap [B \cap A) \cap A].$$

Se va folosi asociativitatea, comutativitatea și relația $A \cup A = A$, respectiv $A \cap A = A$.

25. a) Să se definească pe mulțimea $\{e, a, b, c\}$ o lege de compoziție care să fie comutativă, dar neasociativă.

b) Să se definească pe mulțimea $\{e, a, b, c\}$ o lege de compoziție asociativă, dar necomutativă. (Se va da legea prin tabel).

26. Asociind oricărui cuplu (A, B) de puncte ale planului P mijlocul $A \top B$ al segmentului $\overline{AB}$ definim o lege de compoziție peste tot definită în P.

a) Este legea $\top$ asociativă? b) Este legea $\top$ comutativă?

27. Fie R_+ mulțimea numerelor reale pozitive.

Facem notațiile:

1. $x \top y = \dfrac{x+y}{2}$, $x \in R_+$, $y \in R_+$ (media aritmetică),

2. $x \perp y = \sqrt{x \cdot y}$, $x \in R_+$, $y \in R_+$ (media geometrică),

3) $x * y = \dfrac{2xy}{x+y}$, $x \in R_+$, $y \in R_+$ (media armonică.

a) Este legea $\top$ asociativă? Dar comutativă?

b) Este legea $\perp$ asociativă? Dar comutativă?

c) Este legea $*$ asociativă? Dar comutativă?

28. În mulțimea F a funcțiilor definite pe R cu valori în R, să se dea un exemplu de funcții f și g pentru care $f \circ g \neq g \circ f$.

29. În mulțimea M a matricelor pătrate de ordinul doi, să se precizeze două matrice A și B, astfel încît $A \cdot B \neq B \cdot A$ și două matrice diferite C și D, astfel încît $C \cdot D = D \cdot C$.

30. În mulțimea M a permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să se precizeze două permutări a și b astfel încît $a \circ b \neq b \circ a$ și două permutări diferite c și d astfel încît $c \circ d = d \circ c$.

31. Să se precizeze cum trebuie să fie polinomul $Axy + Bx^2 + Cy^2 + Dx + Ey$, astfel încît legea $x \top y = Axy + Bx^2 + Cy^2 + Dx + Ey$ (în R) să fie comutativă.

Element neutru

$\top$	a	b	c	d
a	b	c	a	d
b	a	b	b	d
c	a	b	c	d
d	b	a	d	d

32. Fie legea de compoziție notată cu semnul $\top$ între elementele mulțimii $E = \{a, b, c, d\}$ dată în tabelul alăturat. Există element neutru?

33. Fie legea de compoziție definită pe mulțimea $E = \{a, b, c, d, e\}$ dată în tabelul următor:

$\top$	a	b	c	d	e
a	a	a	b	a	d
b	a	d	a	b	e
c	b	a	b	c	d
d	a	b	c	d	a
e	d	e	d	a	c

a) Să se verifice că legea $\top$ este comutativă.
b) Avem $d \top a = a$, $d \top b = b$, $d \top c = c$. Este d element neutru?

34. În mulțimea Q definim următoarea lege de compoziție,

$$x \top y = xy - x - y + 2.$$

a) Să se arate că legea $\top$ este asociativă. b) Să se arate că legea $\top$ este comutativă. c) Există element neutru față de legea $\top$?

35. În mulțimea R_+ a numerelor reale pozitive definim următoarea lege de compoziție $x \top y = x^{\log a^y}$.

a) Să se arate că legea $\top$ este asociativă. b) Să se arate că legea $\top$ este comutativă. c) Să se arate că există element neutru.

36. a) Să se dea un exemplu de lege de compoziție asociativă și comutativă fără element neutru.

b) Să se dea un exemplu de lege de compoziție neasociativă și necomutativă față de care există element neutru.

37. Fie mulțimea $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și legea de compoziție $\hat{x} \top \hat{y} = (\hat{3} \cdot \hat{x} \cdot \hat{y}) + (\hat{4} \cdot \hat{x}) + (\hat{4} \cdot \hat{y}) + \hat{4}$, unde semnele $\cdot$, $+$ reprezintă înmulțirea, respectiv adunarea în mulțimea claselor de resturi modulo 5.

a) Să se arate că legea $\top$ este comutativă.

b) Să se arate că elementul $\hat{4}$ este element neutru față de legea $\top$ (se va verifica pentru fiecare element în parte).

Elemente simetrice

38. Fie mulțimea $\{e, a, b, c, d\}$ și legea $\top$ dată în tabelul de mai jos:

$\top$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	b	e
b	b	e	d	e	a
c	c	b	e	a	b
d	d	e	a	b	b

a) Să se verifice că legea $\top$ este comutativă.
b) Să se arate că orice element admite un simetric.
c) Este legea $\top$ asociativă?

39. În mulțimea claselor de resturi modulo 6 fiecare element admite un simetric pentru adunare. a) Să se precizeze opusul fiecărui element.

40. În mulțimea claselor de resturi modulo 7 orice element diferit de $\hat{0}$ este inversabil. Să se determine $\hat{1}^{-1}$, $\hat{2}^{-1}$, $\hat{3}^{-1}$, $\hat{4}^{-1}$, $\hat{5}^{-1}$, $\hat{6}^{-1}$.

41. În mulțimea claselor de resturi modulo 10 să se precizeze elementele care sînt inversabile și cele care nu sînt inversabile.

42. În mulțimea funcțiilor definite pe R (mulțimea numerelor reale) cu valori în aceeași mulțime, fie $f(x) = 3x + 2$ și $g(x) = \operatorname{arctg}(3x + 2)$. a) Să se arate că funcțiile f și g sînt inversabile.

b) Să se determine f^{-1}, g^{-1}.

43. În mulțimea $M = \{a + b\sqrt{2},\ a \in Z,\ b \in Z\}$ există elemente inversabile și elemente neinversabile față de înmulțire. Să se precizeze trei elemente inversabile și trei elemente neinversabile.

44. În mulțimea R a numerelor reale considerăm următoarea lege de compoziție peste tot definită:

$$x \top y = 3xy - 6x - 6y + 14.$$

a) Să se arate că există element neutru față de legea $\top$.

b) Să se arate că există un singur element care nu admite simetric.

45. Fie M mulțimea claselor de resturi modulo 11.

a) Să se rezolve ecuația $(\hat{3} \cdot x) + \hat{4} = \hat{9}$ $(x \in M)$.

b) Să se rezolve ecuația $(\hat{5} \cdot x) + \hat{6} = \hat{8}$ $(x \in M)$.

46. Fie M mulțimea permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Să se afle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

b) Să se rezolve ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Să se rezolve ecuația:

$$Y \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

47. Fie $M = \{x \in R \mid x = a - b\sqrt{7},\ a \in Q,\ b \in Q,\ a^2 - 7b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că înmulțirea este peste tot definită.

b) Să se arate că orice element admite un simetric.

48. Să considerăm mulțimea M a matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & 8y \\ y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$ și $x^2 - 8y^2 = 1$.

a) Să se arate că înmulțirea este peste tot definită.

b) Să se arate că orice matrice din M este inversabilă și să se calculeze inversa.

Distributivitate

49. Să se demonstreze că reuniunea este distributivă față de intersecție și intersecția este distributivă față de reuniune.

50. Fie o mulțime M înzestrată cu două legi de compoziție, una notată aditiv (cu semnul „+") și alta notată multiplicativ cu semnul „$\cdot$".

Știind că legea $\cdot$ este asociativă și distributivă față de legea $+$, și că legea $+$ este asociativă, să se arate că

a) $(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bz + by + bz$. b) $(x + y)^2 = xx + xy + yx + yy$.

51. În mulțimea R a numerelor reale definim două legi de compoziție notate cu semnul $\perp$ respectiv $\top$ în modul următor:

$$x \perp y = x + y - 2;$$

$$x \top y = \frac{1}{2}xy - x - y + 4.$$

a) Să se demonstreze că ambele legi sînt asociative și comutative. b) Să se demonstreze că există element neutru față de ambele legi. c) Să se demonstreze că legea $\top$ este distributivă față de legea $\perp$.

52. În mulțimea R a numerelor reale definim două legi de compoziție notate cu semnele $\oplus$ și $\odot$ în modul următor:

$$x \oplus y = \sqrt[3]{2(x^3 + y^3) - 12};$$

$$x \odot y = \sqrt[3]{4x^3y^3 - 12(x^3 + y^3) + 36}.$$

Să se demonstreze că legea $\odot$ este distributivă față de legea $\oplus$.

53. Să se dea un exemplu de lege de compoziție distributivă față de altă lege de compoziție, astfel încît prima lege să fie necomutativă.

54. Fie F mulțimea funcțiilor $f : R \to R$ de forma $f(x) = ax + b (a \neq 0)$.

a) Să se arate că legea de compoziție $f + g$ este peste tot definită în F. b) Să se arate că compunerea este peste tot definită în F. c) Să se arate că oricare ar fi funcțiile f, g, h din F, avem:

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

Este compunerea distributivă față de adunare?

55. În R, legea max. (x, y) este distributivă față de legea min. (x, y)?

Grupuri

56. Să se verifice că adunarea definește o structură de grup pe următoarele mulțimi:

a) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{x \in R \mid x = 2\alpha,\ \alpha \in Z\}$

b) $\{\ldots, -2k, -k, 0, k, 2k, \ldots\} = \{x \in R \mid x = \alpha k,\ \alpha \in Z,\ k \in R,\ k \neq 0\}$

Să se verifice că înmulțirea definește o structură de grup pe următoarele mulțimi:

c) $\{..., 3^{-2}, 3^{-1}, 1, 3, 3^2, ...\} = \{x \in R \mid x = 3^\alpha, \alpha \in Z\}$

d) $\{..., k^{-2}, k^{-1}, 1, k, k^2, ...\} = \{x \in R \mid x = k^\alpha, \alpha \in Z, k \in R, k \neq 0, k \neq 1\}$.

57. a) Să se arate că dacă un grup aditiv de numere reale conține pe 1, atunci conține mulțimea numerelor întregi.

b) Să se arate că dacă un grup multiplicativ de numere reale conține mulțimea numerelor întregi nenule, atunci conține și mulțimea numerelor raționale nenule.

58. Mulțimea matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$, $x \neq 0$, sau $y \neq 0$ formează grup față de înmulțire? În caz afirmativ să se precizeze dacă este comutativ.

59. a) Dați un exemplu de grup necomutativ cu 24 elemente. b) Dați un exemplu de grup necomutativ având o infinitate de elemente.

60. Să se verifice că înmulțirea determină pe mulțimea $[1, \alpha, \beta]$ a rădăcinilor cubice ale unității, o structură de grup comutativ.

61. Fie σ_4 grupul permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ (grupul simetric de gradul 4) și $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze Π^{27}, Π^{-38}. (Se va observa că $\pi^3 = e$.)

62. În grupul aditiv al claselor de resturi modulo 6 să se determine elementele $7 \cdot \hat{3} + 9 \cdot \hat{3}$ și apoi să se verifice că $7 \cdot \hat{3} + 9 \cdot \hat{3} = (7 + 9) \cdot \hat{3}$.

63. Fie G un grup, în care legea de compoziție este notată cu semnul $\top$, iar elementul neutru cu e.

Să se demonstreze că

$$x \top a \top y = x \top y \Leftrightarrow a = e \qquad (a \in G,\ b \in G,\ x \in G).$$

64. Într-un grup G multiplicativ, avem:

a) $x^2 = x \Leftrightarrow x = e \Leftrightarrow x^{-1} = x$,

b) $x^5 = x^2 \Leftrightarrow x^3 = e \Leftrightarrow x^{-2} = x$,

c) $x^n = x^k \Leftrightarrow x^{n-k} = e \Leftrightarrow x^{k-n+1} = x$.

d) Să se transcrie proprietățile a), b), c) în cazul unui grup notat aditiv.

65. Fie G un grup multiplicativ în care $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$.

a) Să se arate că G este comutativ. b) Să se transcrie rezultatul precedent în cazul unui grup aditiv.

66. În grupul permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să se rezolve ecuațiile:

a) $\Pi^{59} \cdot X = \Pi^{25}$. b) $X \cdot \Pi^{59} = \Pi^{23}$, unde $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (Se va observa că $\Pi^3 = e$.)

În grupul aditiv al claselor de resturi modulo 8, să se rezolve ecuațiile:

a) $\hat{3} + x = \hat{7}$, b) $x + \hat{5} = \hat{2}$.

67. a) Să se arate că toate grupurile, având două elemente, sînt izomorfe. (Se va utiliza identificarea cu ajutorul tabelului legilor de compoziție.) b) Să se arate că toate grupurile cu 3 elemente sînt izomorfe.

68. a) Fie Ox și Oy două axe perpendiculare în planul P. Notăm cu e transformarea identică a planului P, cu S_{ox} simetria față de axa Ox, cu S_{oy} simetria față de axa Oy și cu S_o simetria față de O.

Să se arate că compunerea definește pe mulțimea $\{e, S_{ox}, S_{oy}, S_o\}$ o structură de grup.

b) Fie Ox, Oy, Oz trei semidrepte perpendiculare două cîte două în spațiul S. Notăm cu e transformarea identică a spațiului S, cu S_x simetria față de axa Ox, cu S_y simetria față de axa Oy, cu S_z simetria față de axa Oz.

Să se arate că compunerea definește pe mulțimea $\{e, S_x, S_y, S_z\}$ o structură de grup.

c) Fie $E = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ și $P(E) = \{\phi, A, B, E\}$.

Să se arate că legea de compoziție

$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$, $X \in P(E)$, $Y \in P(E)$ definește pe mulțimea $\{\phi, A, B, E\}$ o structură de grup.

d) Să se arate că grupurile definite la punctele a), b), c) sînt izomorfe. Orice grup izomorf cu grupurile de la a), b), c) se numește *grupul lui Klein*.

e) Există o structură de grup cu 4 elemente care să nu fie izomorfă cu grupurile de la a), b), c)?

69. Să se demonstreze că grupul aditiv al vectorilor de poziție este izomorf cu grupul translațiilor (față de compunere).

70. Fie un poligon regulat cu n laturi. Notăm cu $r_0, r_1, r_2, ..., r_{n-1}$ rotațiile în jurul centrului care lasă poligonul pe loc ($r_0 = R(0°)$, $r_1 = R\left(\frac{360°}{n}\right)$, $r_2 = R\left(2 \cdot \frac{360°}{n}\right), ..., r_{n-1} = R\left((n-1)\frac{360°}{n}\right)$.

a) Să se verifice că compunerea definește pe mulțimea $\{r_0, r_1, r_2, ..., r_{n-1}\}$ o structură de grup comutativ *(grupul rotațiilor poligonului regulat cu n laturi)*.

b) Să se facă tabelul operației pentru cazul rotațiilor triunghiului echilateral și hexagonului regulat.

c) Să se verifice că grupul rotațiilor hexagonului regulat este izomorf cu grupul aditiv al claselor de resturi modulo 6. Generalizare.

71. Fie $G_n = \{1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}\}$ mulțimea rădăcinilor complexe de ordinul n ale unității. a) Să se verifice că înmulțirea determină pe G o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că acest grup este izomorf cu grupul rotațiilor poligonului regulat cu n laturi.

72. a) Să se verifice că mulțimea M a matricelor nesingulare de ordinul doi este grup față de înmulțire.

b) Să se arate că aplicația $f : R \setminus \{0\} \to M$, astfel încît $x \to \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix}$ este un omomorfism. (Mulțimea $R \setminus \{0\}$ se consideră grup multiplicativ.)

73. a) Fie F_1 mulțimea funcțiilor definite pe R cu valori în R, derivabile pe R. Să se arate că adunarea definește pe F_1 o structură de grup. b) Fie F_2 mulțimea derivatelor funcțiilor de la punctul a). Să se arate că adunarea definește o structură de grup pe F_2. c) Să se arate că aplicația $\varphi : f \to f'$, a mulțimii F_1, pe mulțimea F_2, este un omomorfism.

Este aplicația φ un izomorfism?

Inele

74. Să se arate că adunarea și înmulțirea definesc o structură de inel pe următoarele mulțimi de numere:

a) $\{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\} = \{x \in R,\ x = 2\alpha,\ \alpha \in Z\}$,

b) $\{... -2k, -k, 0, k, 2k ...\} = \{x \in R,\ x = \alpha k,\ \alpha \in Z,\ k \in R,\ k \neq 0\}$.

75. Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimile $M = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in Z,\ y \in Z\}$ și $P = \{x + y\sqrt{3} \mid x \in Z,\ y \in Z\}$ o structură de inel. Sînt izomorfe cele două inele?

76. În inelul I al claselor de resturi modulo 5, să se calculeze:

a) $(\hat{3} \cdot x^3 + \hat{2} \cdot x^2 + \hat{3} \cdot x + \hat{4})(\hat{2} \cdot x^3 + \hat{4} \cdot x^2 + \hat{1})$, b) $(x - \hat{2})(x^2 + \hat{2}x + \hat{4})$, c) $(x + y)^{12}$.

(Se va observa că $x = 1$, $x = x$, $x = x^2$, oricare ar fi $x \in I$ și $x \neq 0$.)

77. Fie I un inel comutativ.

Să se arate că sînt adevărate următoarele egalități:

a) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, b) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$, c) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$, d) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, e) $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k$ (binomul lui Newton).

78. În inelul claselor de resturi modulo 7 să se rezolve ecuația $\hat{3} \cdot (x \cdot \hat{4}) = \hat{5}$.

79. În inelul claselor de resturi modulo 12 să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \hat{3} \cdot x + \hat{4} \cdot y = \hat{11} \\ \hat{4} \cdot x - \hat{3} \cdot y = \hat{10} \end{cases}$$

Se poate aplica metoda substituției?

80. a) Să se arate că legile $\oplus$, $\odot$ definite pe mulțimea Z a numerelor întregi în felul următor:

$$x \oplus y = x + y - 3$$
$$x \odot y = xy - 3(x + y) + 12$$

determină pe Z o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

b) Să se arate că între inelul numerelor întregi și inelul definit la punctul a) există un izomorfism de forma $f(x) = ax + b$.

81. Să se arate că legile $\oplus$ și $\odot$ definite pe mulțimea R a numerelor reale, în felul următor:

$$x \oplus y = x + y - 2,$$
$$x \odot y = \frac{1}{3}xy - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{10}{3},$$

determină pe R o structură de inel comutativ cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

82. Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & 5y \\ y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Z$ și $y \in Z$, o structură de inel comutativ cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

83. a) Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea $M = \{z \in R \mid z = x + y\sqrt{2},\ x \in Z,\ y \in Z\}$ o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

b) Să se arate că adunarea și înmulțirea definesc o structură de inel în mulțimea P a matricelor de forma

$$\begin{Vmatrix} x + 2y & 2y \\ -y & x - 2y \end{Vmatrix}, \text{ unde } x \in Z \text{ și } y \in Z.$$

c) Să se arate că aplicația $(x + y\sqrt{2}) \to \begin{Vmatrix} x + 2y & 2y \\ -y & x - 2y \end{Vmatrix}$ este un izomorfism.

84. a) Se știe că în cazul polinoamelor cu coeficienți numerici, condiția necesară și suficientă ca un polinom să fie identic nul este ca toți coeficienții să fie nuli.

Să se arate că polinomul $x^5 + \hat{4}x$, unde coeficienții sînt din clasele de resturi modulo 5, este identic nul.

Să se explice acest rezultat, revăzîndu-se demonstrația în cazul polinoamelor cu coeficienți numerici.

b) Să se arate că un polinom de grad mai mic de 5, cu coeficienți în clasele de resturi modulo 5, este identic nul dacă și numai dacă toți coeficienții sînt nuli.

85. Să se arate că polinomul $\hat{2}x^2 + \hat{2}x$, cu coeficienți în clasele de resturi modulo 4 este identic nul, deși în clasele de resturi modulo 4 există trei valori distincte. Să se explice rezultatul.

86. Să se arate că polinoamele $x^5 + \hat{2}x$ și $3x^5$, cu coeficienți în clasele de resturi modulo 5, sînt identice. Explicație.

87. Să se arate că adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea matricelor pătrate, de ordinul doi, o structură de inel cu element unitate, necomutativ, și cu divizori ai lui 0. (Se vor da efectiv exemple de matrice X și Y astfel încît $X \cdot Y \neq Y \cdot X$ și exemple de matrice A și B, nenule, astfel încît $A \cdot B = 0$.)

88. Fie F mulțimea funcțiilor definite pe R cu valori în R.

Să se arate că legile de compoziție

$$f + g : x \to f(x) + g(x),$$

$$f \cdot g : x \to f(x) \cdot g(x),$$

definesc pe F o structură de inel comutativ, cu element unitate și cu divizori ai lui 0 (se vor da efectiv exemple de divizori ai lui 0).

Ce se poate spune în cazul cînd F este mulțimea funcțiilor definite pe R cu valori în R și continue pe R?

Corpuri

89. a) Să se arate că adunarea și înmulțirea determină o structură de corp pe următoarele mulțimi:

$$M = \{z \in R \mid z = x + y\sqrt{5},\ x \in Q,\ y \in Q\},$$

$$P = \{z \in R \mid z = x + y\sqrt{7},\ x \in Q,\ y \in Q\}.$$

b) Sînt izomorfe cele două corpuri?

90. a) Să se dea exemple de inele care nu sînt corpuri.

b) Să se dea exemple de inele fără divizori ai lui 0 care nu sînt corpuri.

91. Să se demonstreze că orice corp numeric (față de adunarea și înmulțirea curentă) conține corpul numerelor raționale.

92. a) Să se determine cel mai mic corp de numere reale (față de adunarea și înmulțirea curentă), care conține pe $\sqrt{c}$ ($\sqrt{c}$ irațional și $c \in Q$).

b) Să se determine cel mai mic corp de numere reale (față de adunare și înmulțirea curentă) care conține pe $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

93. Să se arate că într-un corp comutativ avem:

$$x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \{x = a \quad \text{sau} \quad x = -a\}$$

$$x^3 - a^3 = 0 \Leftrightarrow \{x = a \quad \text{sau} \quad x^2 + ax + a^2 = 0\}$$

$$x^3 + a^3 = 0 \Leftrightarrow \{x = -a \quad \text{sau} \quad x^2 - ax + a^2 = 0\}.$$

94. Fie $f : C \to C'$ un izomorfism al corpului C pe corpul C'.

a) Să se arate că $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$. Caz particular: $f(nx) = nf(x)$.

b) Să se arate că $f(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$. Caz particular: $f(x^n) = [f(x)]^n$.

c) Să se arate că $f(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = f(a_0)[f(x)]^n + f(a_1)[f(x)]^{n-1} + \ldots + f(a_n)$.

95. Fie corpul $C = \{x \in R \mid x = a + b\sqrt{c},\ a \in Q,\ b \in Q,\ c \in Q, \sqrt{c} \notin Q\}$ (față de adunarea și înmulțirea curentă).

a) Să se arate că aplicația $f : C \to C$ definită prin $f(x + y\sqrt{c}) = x - y\sqrt{c}$ este un izomorfism al corpului C pe corpul C.

b) Să se arate că dacă $a \in Q$, $f(a) = a$.

c) Să se demonstreze că dacă $x_0 = a + b\sqrt{c}$ ($a \in Q$, $b \in Q$, $c \in Q$ și $\sqrt{c} \notin Q$) este o rădăcină a ecuației $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ unde $a_k \in Q$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), atunci și $f(x_0) = a - b\sqrt{c}$ este o rădăcină a ecuației.

96. a) Fie C corpul numerelor complexe. Aplicația $f : C \to C$, astfel încît $f(a + bi) = a - bi$, este izomorfism al corpului C pe el însuși.

b) Să se arate că dacă $a \in R$, atunci $f(a) = a$.

c) Să se arate că dacă $x_0 = a + bi$ ($a \in R$, $b \in R$) este o rădăcină a ecuației $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ unde $a_k \in R$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), atunci și $x_0 = a - bi$ este o rădăcină a ecuației.

97. Să se arate că următoarele legi de compoziție:

$$x \oplus y = x + y - 2,$$

$$x \odot y = \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$$

determină pe mulțimea numerelor reale o structură de corp și că acest corp este izomorf cu corpul numerelor reale.

98. Să se demonstreze că într-un corp comutativ, în care notăm cu $\frac{a}{b}$ elementul ab^{-1} ($b \neq 0$) avem:

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$),

b) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$, $c \neq 0$),

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

99. În corpul claselor de resturi modulo 5, să se calculeze:

a) $\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \frac{\hat{1}}{\hat{3}}$, b) $\frac{\hat{3}}{\hat{4}} \cdot \frac{\hat{3}}{\hat{2}}$, c) $\left(\frac{\hat{3}}{\hat{2}} + \frac{\hat{1}}{\hat{4}}\right)\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \frac{\hat{2}}{\hat{3}}\right)\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}}\right)^3$.

100. Fie K un corp comutativ și $c \in K$.

a) Dacă ecuația $x^2 = c$, are soluția $\delta(c)$, atunci are și soluția $-\delta(c)$ și $\delta(c)$, $-\delta(c)$ sînt singurele soluții ale ecuației $x^2 = c$.

b) Să se arate că ecuația de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) are soluții, atunci, și numai atunci, cînd ecuația $x^2 = b^2 - 4ac$ are soluții și acestea sînt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \delta(b^2 - 4ac)}{2a}$ ($\delta(b^2 - 4ac)$ este una dintre soluțiile ecuației $x^2 = b^2 - 4ac$).

c) Dacă corpul K este corpul numerelor reale, să se transpună rezultatele de la punctele a) și b).

d) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{1} = \hat{0}$ în corpul claselor de resturi modulo 5 și în corpul claselor de resturi modulo 7.

101. Pe mulțimea numerelor reale se consideră următoarele legi de compoziție:

$$x \oplus y = x + y - 1$$
$$x \odot y = 2xy - 2x - 2y + 3.$$

a) Să se arate că acestea determină pe R o structură de corp.

b) Să se arate că aplicația $f : R \to R$, astfel încît $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ este un izomorfism al corpului determinat pe R de adunare și înmulțire, pe corpul determinat pe R de legile $\oplus$ și $\odot$.

102. a) Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea M a matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$, unde $x \in R$, $y \in R$, o structură de corp comutativ, cu element unitate.

b) Să se arate că aplicația $f : C \to M$, $f(x + iy) = \begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$, definită pe mulțimea numerelor complexe cu valori în mulțimea matricelor definită la punctul a) este un izomorfism.

Indicații și răspunsuri

Capitolul I

3. a) $z^2 - (2 - i)z - 1 + 5i$. b) $z^3 - z^2 - 5z + 21$. c) $z^4 - (5 + 3i)z^3 + (5 + 12i)z^2 + (5 - 13i)z - 6 + 2i$. d) $z^4 - 11z^3 + 44z^2 - 74z + 40$.

4. a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ i. b) $1 + i$, $1 + 2i$, c) $2 + i$, $3 - i$. d) $2i$, $-\frac{7}{5}$ i.

6. Fie m și n gradele celor două polinoame. Condiția $m + n = 0$ $(mn \in N)$ dă $m = 0$, $n = 0$.

7. a) m. b) Nu are grad.

8. Nu, căci coeficientul primului termen, $a_0 b_0 x^{m+n}$ poate fi zero, deși $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

9. $c = a$, $d = -b$, numerele trebuie să fie imaginar conjugate.

11. v. 1.2.3.

12. Dacă determinantul unui sistem de n ecuații liniare și omogene este diferit de zero, sistemul admite numai soluția banală (nulă).

14. $P(z)$ este singurul polinom (1.2.4).

15. $P(z) = az^2 + bz + c$; ecuațiile $a + b + c = 9$, $4a + 2b + c = 17$, $a - b + c = 11$ dau $a = 3$, $b = -1$, $c = 7$, deci $P(z) = 3z^2 - z + 7$.

16. În formulele lui Cramer, prin care se află coeficienții polinomului, intervin numai operații raționale.

17. a) $az^2 - az + b$. b) Același rezultat. c) Același rezultat oricare ar fi gradul polinomului.

18. Cuvîntul *identic* nu are aici același sens ca în vorbirea obișnuită (v. 1.2.1). Adjectivului *identic* din limba obișnuită îi corespunde aici adjectivul *egal*. Polinoamele se numesc, totuși, identice pentru că cele două funcții definite de ele sînt una și aceeași funcție.

19. a) Funcția este surjectivă căci pentru orice polinom există cel puțin o expresie algebrică întreagă de la care provine; ea nu este injectivă, căci mai multe expresii algebrice întregi diferite pot duce la același polinom. b) Funcția este surjectivă și injectivă datorită teoremei cu privire la identitatea a două polinoame (1.2.4).

20. $a = 4$, $b = -2$, $c = -1$.

21. Cerc vicios.

23. a) Cîtul: $2z^2 + (3 + i)z + i$, restul: $2 - i$. b) Cîtul: $z + 3 + 2i$, restul $(2 + i)z + 80 - 30i$. c) Cîtul: $2z^2 + z - i$, restul iz.

24. Nu.

26. Se face împărțirea și se pune condiția ca restul să fie polinomul nul; $a = 11$, $b = -12$. Se poate folosi și metoda coeficienților nedeterminați.

27. În identitatea $P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + mx + n$ se pune $x = a$ și $x = b$ și se obțin două ecuații cu necunoscutele m și n. Restul $= \frac{P(a) - P(b)}{a - b} x + \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}$.

28. a) Numai dacă gr. $D(z) <$ gr. $B(z)$. b) Numai dacă $D < B$.

29. a) Da. Cîtul este polinomul P^*, iar restul este $A(z)$. b) Nu. Împărțirea prin P^* nu este definită și nici nu se poate defini, căci ar trebui ca gr. $R(z) <$ $<$ gr. P^*, și P^* nu are grad. c) Da.

30. a) La numerele naturale se pune condiția $R < I$, iar la polinoame nu se pune condiția $R(x) < I(x)$, care n-ar avea nici un sens, ci gr. $R(x) <$ gr. $I(x)$. b) Dacă măcar unul dintre numerele $D(a)$, $I(a)$, $C(a)$, $R(a)$ nu este întreg, afirmația nu are nici un sens. Dacă toate sînt întregi, numai dacă $R(a) < I(a)$, c) $4 <$ $< x - 2$; $x > 6$.

31. a) Primele trei afirmații sînt adevărate, a patra este falsă. b) Toate afirmațiile sînt adevărate. c) Toate afirmațiile sînt false (v. și probl. 9).

32. Fie $c_0z^2 + c_1z + c_2$ și $r_0z^2 + r_1z + r_2$ cîtul și restul. Procedînd ca la 1.3.2 se obține un sistem de 6 ecuații liniare cu necunoscutele c_0, c_1, c_2, r_0, r_1, r_2. Determinantul sistemului este egal cu $b_0^3 \neq 0$, deci sistemul admite o soluție unică.

34. Pentru a face, de exemplu, scăderea $\hat{2} - \hat{5}$ în Z_7, se caută în tabela de adunare a lui Z_7 în linia lui $\hat{5}$ elementul $\hat{2}$; el se găsește în coloana lui $\hat{4}$, deci $\hat{2} - \hat{5} = \hat{4}$. Se poate proceda și astfel: $7 - 5 = 2$, deci $\hat{2}$ este opusul lui $\hat{5}$, $-\hat{5} = \hat{2}$ și se adună $\hat{2}$ cu opusul lui $\hat{5}$, care este tot $\hat{2}$; $\hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$. Alt exemplu: În Z_{10}, $\hat{3} - \hat{8} = ?$ $10 - 8 = 2$, deci $-\hat{8} = \hat{2}$; $\hat{3} + \hat{2} = \hat{5}$, deci $\hat{3} - \hat{8} = \hat{5}$. În mod analog se face împărțirea. Exemplu: în Z_5, $\hat{3} : \hat{4} = ?$ În tabela de înmulțire pentru Z_5 se caută $\hat{4}$ în linia lui $\hat{3}$; el se găsește în coloana lui $\hat{2}$, deci $\hat{3} : \hat{4} = \hat{2}$. Dacă deîmpărțitul se găsește de mai multe ori, împărțirea dă tot atîtea cîturi, iar dacă deîmpărțitul nu se găsește în linia împărțitorului, împărțirea nu se poate face. Exemplu: în Z_{10}, $\hat{6} : \hat{4} = ?$ În linia lui $\hat{4}$ elementul $\hat{6}$ se găsește în coloana lui $\hat{4}$ și în coloana lui $\hat{9}$, deci $\hat{6} : \hat{4} = \{\hat{4}, \hat{9}\}$. Tot în Z_{10}, împărțirea $\hat{3} : \hat{4}$ sau $\hat{5} : \hat{4}$ nu se poate face. a) $\hat{1}$; $\hat{3}$; $\hat{4}$; $\hat{6}$; $\hat{3}$; $\hat{4}$; $\hat{2}$; $\hat{4}$. b) $\hat{2}$; $\hat{5}$; $\hat{5}$; $\hat{4}$; $\hat{3}$; $\hat{3}$; imposibil; $\{\hat{2}, \hat{5}\}$. c) $\hat{5}$; $\hat{6}$; $\{\hat{3}; \hat{8}\}$, $\{\hat{1}, \hat{6}\}$; $\{\hat{4}, \hat{9}\}$; $\{\hat{2}, \hat{7}\}$; $\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{9}\}$; $\{\hat{2}, \hat{7}\}$.

35. a) Da, fiindcă în fiecare linie din tabela de adunare fiecare element apare o singură dată. b) Da. c) Da, dacă $y \neq 0$. d) Nu. e) Nu.

36. a) Dacă n este număr prim, Z_n nu are divizori ai lui zero. În Z_4: $\hat{2}$; în Z_6: $\hat{2}$ și $\hat{3}$; în Z_{12}: $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ și $\hat{6}$. b) În Z_3, Z_5 și Z_7.

37. a) $x^2 + \hat{2}$. b) $\hat{6}x^3 + \hat{7}x^2 + \hat{9}x + \hat{3}$. Fiindcă în Z_6 și Z_{10} există diviziori ai lui zero.

38. Teorema de la 1.2.2. presupune că, în cazul unui polinom de gradul n, mulțimea de definiție are cel puțin $n + 1$ elemente și coeficienții aparțin unei mulțimi fără divizori ai lui zero.

a) Prima dintre aceste condiții nu este îndeplinită. b) Idem. c) Pentru $P(x)$ condiția a doua nu este îndeplinită, pentru $Q(x)$ nici prima, nici a doua.

Capitolul II

1. a) $-1 \pm i\sqrt{2}$. b) Rădăcinile: ± 2, $\pm i$. **2.** a) $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. b) $-1 \pm i\sqrt{2}$.

4. $[m = pn] \Rightarrow [z^m - 1 = z^{np} - 1 = (z^n)^p - 1]$; se pune $z^n = u$, $u^p - 1$ este divizibil prin $u - 1$.

5. Ultimul termen din rîndul al doilea, adică restul împărțirii este $a_0p^4 +$ $+ a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4$.

6. $P(z) - P(c) = a_0(z^n - c^n) + a_1(z^{n-1} - c^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(z - c)$. Fiecare termen din dreapta este divizibil cu $z - c$, deci și suma lor, adică $P(z) - P(c)$ este divizibil cu $z - c$. Fie $Q(z)$ cîtul împărțirii lui $P(z) - P(c)$ prin $z - c$; atunci $P(z) - P(c) = (z - c)Q(z)$, de unde...

8. Se procedează ca la 2.1.3. **9.** Da; este contrapoziția consecinței teoremei lui Bézout.

10. a) Dacă un număr natural n este divizibil prin numerele *prime* a și b, el este divizibil prin produsul ab; b) v. 2.1.6.

11. Împărțitorul fiind $D(z)$, presupunem că există două cîturi $C_1(z)$ și $C_2(z)$ și două resturi R_1 și R_2. Atunci au loc identitățile $D(z) = (z - a)C_1(z) + R_1 =$ $= (z - a)\ C_2(z) + R_2$. Dar $R_1 = D(a)$ și $R_2 = D(a)$, deci $R_1 = R_2$. Din $(z - a)$ $C_1(z) = (z - a)C_2(z)$ rezultă $C_1(z) = C_2(z)$.

12. a) $a = 10^n$. b) $b^2 - 4ac = 2k^2$, $k \in Q$.

13. Nici o soluție; nu este nici o contradicție, ecuația propusă nu este o ecuație algebrică.

14. Da, căci ecuația $P^* = 0$ este satisfăcută de orice valoare a variabilei, deci ea are cel puțin o rădăcină.

16. Pe baza teoremei de la 2.2.4.

17. Da. Prin ipoteză, există un polinom $Q(x)$ astfel încît $P(z) = (z - a)Q(z)$. Înlocuind aici $Q(z)$ prin descompunerea sa, obținem o descompunere a lui $P(z)$. Descompunerea fiind unică...

18. Descompunerea este unică.

19. Rădăcinile sînt $\pm\sqrt{6}$, $\pm\sqrt{2}$; ecuația propusă nu este o ecuație algebrică.

20. Da, în partea finală, în care se arată că o ecuație de gradul n nu poate avea mai mult ca n rădăcini; da.

21. a) O ecuație de gradul zero, de exemplu ecuația $3 = 0$ nu are nici o rădăcină. b) Nu.

22. Ecuația $P(z) = a$ este tot de gradul n, deci pentru n valori ale lui z.

23. b) Pentru m valori, căci ecuația $P_m(x) = P_n(x)$ este de gradul m. c) Pentru cel mult n valori.

24. $p \leqslant \max.\ (m, n)$, unde p este numărul căutat.

25. $S_p = S_A \cup S_B$.

26. Cel mult n.

27. a) $(z - 1)(2z - 1)$. b) $3\left(z - \frac{a - ai\sqrt{14}}{3}\right)\left(z - \frac{a + ai\sqrt{14}}{3}\right)$.
c) $(z - i) \cdot (z - 2i)$. d) $(2z - 1)[z - (1 + i)]$. e) $(z - 1)(z + 1)(2z - 1)(2z + 1)$.
f) $(z - 1) \cdot (z + 1)(z - i)(z + i)$.

28. Ambii termeni ai fracției se descompun în factori liniari și se constată că nu au nici un factor comun. Dacă descompunerea n-ar fi unică, nu am avea siguranța că nu există o altă descompunere a numărătorului și a numitorului în care să apară un factor comun.

29. a) $6z^3 - 13z^2 + 9z - 2 = 0$. b) $z^3 - (1 + 3i)z^2 - (2 - 3i)z + 2 = 0$.
c) $z^3 - 5z^2 - 37z + 41 = 0$. d) $z^4 - 6z^3 + 13z^2 - 14z + 6 = 0$. e) $z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 20z - 12 = 0$. f) $z^6 - (3 + i)z^5 + (4 + 3i)z^4 - 4(1 + i)z^3 + (3 + 4i)z^2 - (1 + 3i)z + i = 0$.

30. a) $(x - 2)(x + 2)\ P(x)$, unde $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul 98. b) Imposibil.

31. a) Da. $(a + bi)\ P(x) = 0$, unde $b \neq 0$ și $P(x)$ este un polinom cu coeficienți reali care are numai rădăcini reale. Condiția ca ecuația să aibă această formă este și necesară, căci, dacă rădăcinile unei ecuații $Q(x) = 0$ sînt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avem $Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ unde produsul $P(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$ este un polinom cu coeficienți reali, deci $Q(x) = a_0P(x)$ are forma de mai sus. b) Da; exemplu: $x^2 + x + 1 = 0$.

33. a) $(z^2 + z - 2)^5$. b) $(z - 1)^m (z + 2)^n$, $m + n = 7$, $m, n \in N$; sînt 6 soluții. c) Sînt $p - 1$ soluții.

34. a) Polinoamele se descompun; rădăcinile sînt $z_1, z_2, \ldots, z_{m+n}$. b) Fiecare rădăcină comună este o rădăcină dublă a ecuației $P(z) \cdot Q(z) = 0$. c) Ea este rădăcină multiplă de ordinul $p + q$ a ecuației $P(z) \cdot Q(z) = 0$.

35. a) Se aplică teorema de la 2.2.12, $p = 3$, $q = 1$. b) Imposibil (v. 2.2.13, obs. 3).

36. a) Se aplică propoziția de la 2.2.12; coeficienții corespunzători sînt egali doi cîte doi.

37. Exemplu: $(x - 1)^3 (x - 2)^2$ și $(x - 1)(x - 2)$ nu au aceleași rădăcini.

38. a) v. cap. I, problema 6. b) Din $P(z) = Q(z)C(z)$ și $Q(z) = P(z)D(z)$ urmează prin înmulțire $C(z)D(z) = 1$. *Altfel*: Fie p gradul lui $P(z)$ și q gradul lui $Q(z)$. Deoarece $P(z)$ este divizibil prin $Q(z)$, $p \geqq q$; analog $q \geqq p$; de unde $p = q$. Polinoamele fiind de același grad, cîtul lor este o constantă, $P(z) = kQ(z)$. c) Cele două numere sînt egale.

39. Pentru relația a treia și a patra, v. 2.4.7. **40.** b) C_n^p termeni.

42. Reciproca. Procedeul bazat pe formulele lui Vieta este derivat din celălalt căci aceste formule se deduc din descompunerea unui polinom în factori.

43. $\frac{c - a}{1 - b}$. **44.** $x^3 - ax^2 + sx - v = 0$.

45. a) $\frac{2}{3}$, 1, -4. b) 2, 3, $-\sqrt{3}$. c) $-\frac{3}{5}$, 1,5. d) i, 2i, $\frac{3}{2}$. e) Rădăcinile se notează cu α, 3α și β; 2, 6 și -1. f) Rădăcinile se notează cu α, 2α și β; i, 3i, 6i. g) Rădăcinile se notează cu α, β, $\alpha + \beta$; $\frac{a}{3}$, $\frac{2a}{3}$, a. h) Rădăcinile se notează cu α, $\alpha + 1$ și β; se elimină β din primele două relații ale lui Vieta, se obține $3\alpha^2 - (8i - 1)\alpha - 5 - i = 0$. $\Delta = -3 - 4i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(2i - 1)$; rădăcinile: i, $1 + i$, 2i. i) Analog cu problema precedentă; rădăcinile: a, $3a$, $-4a$. j) Relația dată și relația a treia a lui Vieta dau $z_1 = \pm a^3$, numai a^3 satisface ecuația; rădăcinile: a, a^2, a^3. *Altfel*: identificare cu $(z^2 - pz + q)(z - q)$. k) v. problema precedentă; rădăcinile: 1, 3, 6.

46. a) Identificare cu $(z^3 + pz - 1)(z^2 + qz + s)$; $1 \pm \sqrt{2}$, $1 \pm \sqrt{5}$. b) Analog cu problema precedentă; 3, i, $1 \pm \sqrt{2}$. c) Identificare cu $(z^2 - 2z + p)(z^2 + qz + r)$; $1 \pm 2i$, $-1 \pm \sqrt{2}$. d) Analog cu problema precedentă; $4a$, $-a$, $\frac{a}{2}(3 \pm i)$. e) Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz - q)$; -3, 2, $\frac{1 + i\sqrt{23}}{2}$. f) Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz + q)$; 2i, 3i, $2 \pm \sqrt{10}$.

47. a) $m = 19$, rădăcinile: -3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$. b) $m = -2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$; rădăcinile: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. c) $m = 1$; rădăcinile: -2, 3, $\frac{1}{2}$. d) $m = 5$, rădăcinile: 2, 3, $\frac{1}{3}$. e) Polinomul dat se identifică cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz + 3)$; $p_1 = -4$,

$r_1 = 2$, $q_1 = -1$, $m_1 = -14$; rădăcinile: $2 \pm \sqrt{5}$, $-1 \pm i\sqrt{2}$; $p_2 = 2$, $r_2 = -4$, $q_2 = -1$, $m_2 = 10$; rădăcinile: 1, 3, $-1 \pm \sqrt{2}$. f) Identificare cu $(z^2 - 5z + a) \cdot (z^2 + bz + c)$; $a_1 = 3$, $b_1 = -3$, $c_1 = 2$, $m_1 = 20$; rădăcinile: 1, 2 și $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$; $a_2 = \frac{10}{3}$, $b_2 = -3$, $c_2 = \frac{9}{5}$, $m_2 = \frac{302}{15}$; rădăcinile: $\frac{15 \pm \sqrt{105}}{6}$, $\frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{10}$. g) Relația dată și primele două dintre relațiile lui Vieta dau rădăcinile -1, 3, 5 iar ultima relație dă $a = 15$ sau rădăcinile -5, $6 \pm i\sqrt{31}$, $a = 335$. h) Rădăcinile 3, 4, 5 și $a = 47$ sau rădăcinile 1, $\frac{11 \pm i\sqrt{119}}{2}$ și $a = 71$.

48. Polinomul dat se identifică cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + pz + r)$. a) Ecuațiile $p^2 + q + r = 0$, $p(q + r) = 8$ dau $p = -2$, $q + r = -4$; $q = -1$, $r = -3$ (sau invers); $a = -4$, rădăcinile: $1 \pm \sqrt{2}$, 3, -1. b) 1, $2 + i$, 3, i; $a = 10(1 + i)$.

49. a) Rădăcinile se notează: α, α, β, β; prima și a treia dintre relațiile lui Vieta dau α, $\beta = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ iar a doua și a patra dau $m = 0$, $n = 1$. *Altfel*: identificarea cu

$(x^2 + px + q)^2$. b) Rădăcinile: 1, 1, i, i; $m = 2(1 - i)$, $n = -1$.

50. Rădăcinile se notează cu α, $-\alpha$ și 2, $m = 3$, $n = 5$, rădăcinile: 2, -3, 3. *Altfel*: identificare cu $(x^2 + p)(x - 2)$.

51. v. recomandările de la 2.3.12. Prima dintre relațiile lui Vieta dă $z_4 = 5$, relația a 3-a dă $z_2 z_3 = -1$; rădăcinile: 2, 1, -1, 5; a doua și a patra dintre relațiile lui Vieta dau $m = 9$, $n = -10$.

52. a) Dacă se ține seama de relația dată, $z_1 + z_2 = 0$, relațiile lui Vieta devin: $z_3 = -a$, $z_1 z_2 = b$, $z_1 z_2 z_3 = -c$. Valorile lui z_3 și $z_1 z_2$ date de primele două relații introduse într-a treia dau condiția necesară și suficientă: $c = ab$. Rădăcinile: $\pm \sqrt{-b}$, $-a$. Pentru exemplul numeric, se iau a și b după voie de exemplu $a = 2$, $b = -4$ și $c = ab$ $(= -8)$. *Altfel*: identificare cu $(x^2 + p) \cdot (x + q)$.

b) Dacă se ține seama de $z_1 z_2 = 1$, relațiile lui Vieta devin: $z_1 + z_2 + z_3 = -a$, $z_3(z_1 + z_2) = b - 1$, $z_3 = -c$; prima și a treia relație dau $z_1 + z_2 = c - a$, iar a doua dă condiția necesară și suficientă: $c^2 - ac + b - 1 = 0$. Rădăcinile z_1 și z_2 sînt date de ecuația $z^2 - (c - a)z + 1 = 0$. Pentru exemplul numeric, se iau a și c arbitrari. *Altfel*: identificare cu $(x^2 + px + 1)(x - q)$.

c) Relațiile date și primele două dintre relațiile lui Vieta dau $z_1 = -\frac{a}{2}$, $z_2 z_3 = \frac{4b - a^2}{4}$; introducînd în relația a treia, se obține condiția necesară și suficientă: $a^3 - 4ab + 8c = 0$. Rădăcinile z_2 și z_3 se află cunoscînd suma lor, $-\frac{a}{2}$ și produsul lor, $\frac{4b - a^2}{4}$. Pentru exemplul numeric, se pot lua a și b arbitrari. *Altfel*: Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z + p)$.

d) Analog cu c); $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

e) $11a^2 = 36b$ și $a^3 = 36c$. Pentru exemplul numeric, se ia a arbitrar, de preferință un multiplu de 6.

53. v. recomandările de la 2.3.12. a) Identificare cu $(z^2 + p)(z^2 + qz + r)$. Din prima, a 3-a și a 4-a relație se scot q, p și r — în ipoteza că $a \neq 0$; introducînd în relația a doua, se obține condiția necesară și suficientă: $c^2 + a^2 d - abc = 0$; $z_1, z_2 = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$, z_3 și z_4 sînt dați de ecuația $cz^2 + acz + ad = 0$. Dacă $a = 0$, relația a 3-a dă $c = 0$, condiție conținută în cea precedentă. Pentru exemplul numeric, se iau a, b și c arbitrari.

b) Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz + q)$. Ultima dintre relațiile obținute dă $q = \pm \sqrt{d}$; înlocuind în relația a treia q prin această valoare și $p + r$ prin a, se obține condiția necesară și suficientă: $a^2 d = c^2$ (b rămîne arbitrar). p și r se află din primele două relații. Pentru exemplul numeric, se iau a și d arbitrari (d de preferință pătrat perfect).

c) Identificare cu $(z^2 + pz + q)^2$. Prima și a treia dintre relațiile obținute dau $p = \frac{a}{2}$, $q = \frac{c}{a}$ (dacă $a \neq 0$); introducînd în relațiile a doua și a patra, se obține condiția necesară și suficientă: $a^3 - 4ab + 8c = 0$ și $c^2 = a^2 d$. Dacă $a = 0$, relațiile devin: $p = 0$, $2q = b$, $c = 0$, $q^2 = d$; în acest caz, condiția este $b^2 - 4d = 0$ (ecuația devine bipătrată, realizantul $= 0$). Condiția $a^3 - 4ab + 8c$ este aceeași ca la 2.3.8, iar condiția $c^2 = a^2 d$ este aceeași ca la problema precedentă. *Altfel*: rădăcinile se notează cu α, α, β, β și se folosesc formulele lui Vieta.

Explicație: $[(z_1 + z_2 = z_3 + z_4)$ și $(z_1 z_2 = z_3 z_4)] \Rightarrow [(z_1 = z_2)$ și $(z_3 = z_4)]$.

d) Identificare cu $(z^2 - pz + q)(z^2 - qz + p)$. Prima și a patra dintre relațiile obținute dau $p + q = -a$, $pq = d$; relațiile a doua și a treia dau condiția necesară și suficientă: $a + b = d$ și $a^2 + c = 2d$. Pentru a rezolva ecuația, se observă că p și q sînt rădăcinile ecuației $u^2 + au + d = 0$. Pentru exemplul numeric, se iau a și b arbitrari.

e) Rădăcinile se notează cu α, 2α, β și 2β. Prima și a doua dintre relațiile lui Vieta dau: $\alpha + \beta = -\frac{a}{3}$, $2\beta = \frac{9b - 2a^2}{45}$; introducînd în următoarele relații, se obține condiția necesară și suficientă: $4a^3 - 18ab + 45c = 0$ și $4(9b - 2a^2)^2 = 2\,025\,d$. Rădăcinile α și β se află cunoscînd suma și produsul lor. Pentru exemplul numeric, se iau a și b arbitrari (de preferință a multiplu de 3). *Altfel*: identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + 2pz + 4q)$.

54. Se notează rădăcinile cu u, $-u$, v și $-v$, și se scriu prima și a treia dintre formulele lui Vieta.

55. Sistemul este totdeauna compatibil, căci x, y, z sînt rădăcinile ecuației $u^3 - au^2 + bu - c = 0$, care are o soluție oricare ar fi a, b, $c \in C$.

56. x, y, z și x, y, z, u sînt, respectiv, soluțiile ecuațiilor $t^3 - pt^2 + qt - r = 0$ și $t^4 - at^3 + bt^2 - ct + d = 0$. În condițiile problemei, polinomul al doilea este divizibil prin primul.

57. În fiecare dintre ecuațiile (2) membrul stîng este simetric în raport cu oricare două dintre literele α, β și γ. Rezultă că dacă, de exemplu, tripletul ordonat (3, 5, 8) este o soluție a sistemului (2) în sensul că $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 8$, tripletul (5, 3, 8) este de asemenea o soluție a sistemului (2), și anume $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 8$. Același lucru se poate spune despre toate permutările elementelor (5, 3, 8). $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, deci cele 3 rădăcini ale ecuației (1) dau 6 soluții ale sistemului (2).

59. v. 2.4.7. a) $z_1 = z_2 = \frac{2}{3}$, $z_3 = -\frac{4}{3}$. b) $z_1 = z_2 = \sqrt{3}$, $z_3 = -2\sqrt{3}$. c) $z_1 = z_2 = 2 + i$, $z_3 = -4 - 2i$. d) $z_1 = z_2 = 1 + i$, $z_3 = -2 - 2i$.

60. v. 2.4.7 a) $z_1 = z_2 = z_3 = 2a$, $z_4 = -\frac{a}{3}$. b) $z_1 = z_2 = z_3 = i$, $z_4 = -i$. c) $z_1 = z_2 = z_3 = 2 + \sqrt{5}$, $z_4 = 1$.

61. a) Se pune condiția $P(3) = P'(3) = 0$ sau identificare cu $(z-3)^3(z-\alpha)$. $a = -4$, $b = -3$, $z_3 = -2$. b) $b = 1 - 4i$, $c = i$, $z_3 = -i$. c) $m = -7$, $n = 6$, $z_3 = 2$, $z_4 = 3$.

62. a) $a = 1$, rădăcinile: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$; $a = -1$, rădăcinile: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$. b) $a = 2i$, rădăcinile: $-i, -i, 2i$; $a = -2i$, rădăcinile: $i, i, -2i$. c) $a = 3$, rădăcinile: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -3$; $a = -\frac{605}{27}$, rădăcinile: $-\frac{11}{6}, -\frac{11}{6}, \frac{5}{3}$.

63. a) $a = -10$, $b = 3$, rădăcinile: 1, 1, 1, 3; $a = -8$, $b = 0$, rădăcinile, 2, 2, 2, 0. b) $a = b = 0$, rădăcinile: 0, 0, 0, -1; $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{16}$, rădăcinile: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. c) $a = 8$, $b = -3$, rădăcinile: 1, 1, 1, -3; $a = -8$, $b = -3$, rădăcinile: $-1, -1, -1, 3$.

64. Se pune condiția $P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$ sau identificare cu $(z-2)^3 \cdot (z-\alpha)$; $p = 6$, $q = 4$, $r = -8$; $z_4 = -1$.

65. $P'(-3) = 0$ și $P'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ dau un sistem de două ecuații cu necunoscutele a și b; $a = 12$; $b = -56$, $c = -18$, $z = 2$. *Altfel*: identificare cu $(z+3)^2(2z-1)(z-\alpha)$.

66. Identificare cu $(z-a)^3$, $p^2 = 3q$, $p^3 = 27r$, $z = -\frac{p}{3}$.

67. $p = -\frac{1}{3}$, $q = -\frac{2}{27}$, rădăcinile: $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

69. Mai trebuie spus că $P(a) = 0$ și $P'''(a) \neq 0$.

70. Nu; $f(x) = 0$ nu este o ecuație algebrică.

71. Rădăcinile sînt aceleași, dar duble, multiple de ordinul k.

72. Ecuația este de forma $(z-a)^n (z-b)^n = 0$; se calculează derivata.

73. V. 2.4.9. $4p^3 + 27q^2 = 0$, $p < 0$; relația (4) de la 2.4.9. arată că rădăcina dublă are același semn cu q.

74. Dacă $P(z) = 0$ este de gradul n, $P'(z) = 0$ are $n - 1$ rădăcini.

Dacă $P(z)$ este divizibil prin $P'(z)$, toate rădăcinile derivatei sînt rădăcini multiple ale ecuației $P(z) = 0$ de ordin $\geqslant 2$. Aceasta este posibil numai dacă $n \geqslant 2(n-1)$, adică $n \leqslant 2$. Ecuația de gradul II este în acest caz de forma $a(x-\alpha)^2 = 0$.

76. $P(x) = (x-a)^h C(x)$, $C(a) \neq 0$. Se dau lui x valorile $x = a + h$ și $x = a - h$ unde $h > 0$ și suficient de mic încît polinomul $C(x)$ să păstreze în intervalul $[a-h, a+h]$ același semn și se compară semnul expresiei $P(a-h) = (-h)^h C(a-h)$ cu semnul expresiei $P(a+h) = h^h C(a+h)$. Curba este tangentă la axa Ox în punctul a; ea traversează axa Ox (punct de inflexiune) sau a este un punct de extrem, după cum k este impar sau par.

78. 1) Împărțirea polinoamelor se face după procedeul obișnuit; pentru împărțirea coeficienților, se folosesc tabelele corespunzătoare. Dacă la împărțirea coeficienților se obțin două cîturi parțiale, lucrarea se continuă în ambele variante. Dacă primul coeficient al unui rest parțial nu se poate împărți prin primul coeficient al împărțitorului, împărțirea polinoamelor nu se poate face. a) Cîtul $\hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{1}$, restul $\hat{2}$. b) Cîtul $x^2 + \hat{2}x + \hat{5}$, restul $\hat{3}$. c) Cîtul $\hat{4}x + \hat{2}$, restul $\hat{5}$ sau cîtul $\hat{4}x + \hat{5}$, restul $\hat{2}$. d) Cîtul $\hat{2}x + \hat{1}$, restul $\hat{2}$ sau cîtul $\hat{2}x + \hat{5}$, restul $\hat{6}$ sau cîtul $\hat{2}x + \hat{9}$, restul $\hat{10}$.

2) Dacă împărțitorul este de forma $x - a$, demonstrația de la 1.3.3. rămîne valabilă oricare ar fi clasa de resturi căreia îi aparțin coeficienții polinoamelor. În locul relației (4) de la 1.3.3. se obține gr. $(x-a)(C-C') \geqslant 1$, căci primul termen al acestui produs se obține înmulțind x cu primul (eventual unicul) termen din $C - C'$, iar în locul relației (5) se obține gr. $(R' - R) = 0$, sau $R' - R$ este polinomul nul, căci R' și R sînt constante.

În cazul unui împărțitor oarecare, demonstrația de la 1.3.3. nu mai este valabilă, căci nu mai sîntem siguri de relația (4): dacă coeficienții polinoamelor aparțin unei clase de resturi cu divizori ai lui zero, cum este Z_6 sau Z_{12}, se poate întîmpla ca gradul produsului $I(C-C')$ să fie mai mic decît gradul lui I. De exemplu, în Z_6 $(\hat{3}x^2 + \hat{5}x + \hat{2}) \cdot \hat{2} = \hat{4}x + \hat{4}$ — produsul este de grad mai mic decît primul factor (v. cap. I, problema 8 și 37).

Exemplele c) și d) arată că dacă Z_4 are divizori ai lui zero, teorema de la 1.3.3. nu este adevărată.

79. Da, oricare ar fi n. Procedeul de împărțire obișnuit se poate folosi totdeauna, căci pentru a obține coeficienții cîtului se împarte mereu coeficientul primului termen al restului parțial prin $\hat{1}$, și în orice Z_n, oricare ar fi a, $\hat{a} : \hat{1} = \hat{a}$.

80. 1) a) $\hat{1}, \hat{2}$. b) $\hat{1}, \hat{2}$. c) $\hat{0}, \hat{5}, \hat{2}, \hat{3}$. d) $\hat{0}, \hat{6}, \hat{2}, \hat{4}$. e) $\hat{0}, \hat{7}, \hat{2}, \hat{5}$. f) $\hat{2}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{11}$. 2) Teorema despre numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice se bazează pe descompunerea în factori liniari, care, la rîndul ei, se bazează pe teorema fundamentală

a algebrei. Or, clasele de resturi, înzestrate cu adunarea și înmulțirea nu sînt algebric închise (exemple: ecuația $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ cu coeficienți din Z_3 n-are nici o rădăcină, de asemenea ecuația $x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$ cu coeficienți din Z_5), de aceea demonstrația ei nu este valabilă în cazul ecuațiilor cu coeficienți în Z_n. 3) Fiindcă în Z_6, Z_8, Z_{10} și Z_{12} există divizori ai lui zero (v. 1.2.3, obs. 2). 4) Dacă a este o rădăcină a ecuației, polinomul se împarte prin $x - \hat{a}$, care este egal cu $z + -\hat{a}$. a) $\hat{2}(x + \hat{1})(x + \hat{2})$. b) $(x + \hat{4})(x + \hat{3})(\hat{2}x + \hat{1})$. c) $x(x + \hat{1})$ sau $(x + \hat{4})(x + \hat{3})$. d) $x(x + \hat{2})$ sau $(x + \hat{6})(x + \hat{4})$. e) $x(x + \hat{3})$ sau $(x + \hat{8})(x + \hat{5})$. f) $(x + \hat{10})(x + \hat{9})$ sau $(x + \hat{6})(x + \hat{1})$. În cazurile a) și b) descompunerea este unică, căci în Z_3 și Z_5 nu există divizori ai lui zero; demonstrația de la 2.2.7 rămîne valabilă (și simplificările sînt permise; v. nota de la 2.2.4). În cazul ecuațiilor c) — f) situația este alta. Deoarece în Z_6, Z_8, Z_{10} și Z_{12} există divizori ai lui zero, împărțirea nu este unică, deci nota de la 2.2.4 nu se aplică, din $AB = AC$ nu rezultă $B = C$, simplificările nu sînt permise și demonstrația de la 2.2.7 cade. 5) În Z_6, Z_8 și Z_{10}, există divizori ai lui zero; din $P(x) = (x + \hat{a})(x + \hat{b})$, $\hat{c} + \hat{a} \neq \hat{0}$, $\hat{c} + \hat{b} \neq \hat{0}$ nu rezultă că $P(\hat{c}) \neq \hat{0}$ (v. nota de la 2.2.8).

Capitolul III

1. a) $z_2 = 4 + i$, $z_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$. b) $z_2 = -i$, $z_3 = \sqrt{5}$, $z_4 = 2\sqrt{5}$.

2. a) V. 3.1.9. $a = -30$, $b = -27$; rădăcinile: $-1 \pm i\sqrt{2}$, $2 \pm \sqrt{13}$. b) $a = -36$, $b = 113$; rădăcinile: $\frac{5 \pm 2i}{2}$, $2 \pm \sqrt{3}$. Dacă nu se pune condiția ca coeficienții să fie reali, nu avem dreptul să aplicăm teorema de la 3.1.5.

3. a) Teorema de la 3.1.5 nu se poate aplica, deoarece nu s-a cerut ca a să fie real. $P(2 + i) = 0$ dă $a = -5 - i$; rădăcinile: $2 + i$, 1 și 2. b) Imposibil.

4. Se împarte (Horner) polinomul dat prin $z - (1 - i)$; celelalte rădăcini sînt $2 \pm \sqrt{3}$.

5. Cînd se trece de la $P(u)$ la $P(\bar{u})$, în fiecare termen al polinomului, $a_k z^{n-k}$, în locul factorului z^{n-k} apare $\overline{z^{n-k}}$, iar a_k rămîne neschimbat. Ca să putem aplica teorema (I) de la 3.1.5, ar trebui să înlocuim și a_k prin $\bar{a}_k$, dar $a_k = \bar{a}_k$ dacă și numai dacă a_k este real.

6. Dacă rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice sînt conjugate două cîte două și unul dintre coeficienții săi este real, toți coeficienții ecuației sînt reali (v. cap. II, problema 31).

8. a) $x_2 = 3 + \sqrt{7}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$. b) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$.

9. V. 3.1.8. a) $m = -3$, $n = 2$; $2 \pm \sqrt{2}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. b) $m = -1$, $n = -2$; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{2}$ și 1. Cînd nu se cere ca parametrii să fie raționali, ei nu se pot determina; v. problema 2.

10. Se pune condiția ca $1 + \sqrt{2}$ să satisfacă ecuația: $a = 2$, $x_{2,3} = \frac{2 - \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$

11. Rădăcinile ecuației vor fi $a + \sqrt{2}$, $a - \sqrt{2}$ și α. Se identifică polinomul dat cu $(x^2 - 2ax + a^2 - 2)(x - \alpha)$.
a) $a = 3$, $m = -21$, $\alpha = 3$; rădăcinile: 3 și $3 \pm \sqrt{2}$; b) $a = 3$, $\alpha = -2$, $m = 14$, rădăcinile: -2 și $3 \pm \sqrt{2}$; $a = -\frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{14}{3}$, $m = \frac{238}{27}$; rădăcinile: $\frac{14}{3}$ și $-\frac{1}{3} \pm \sqrt{2}$.

12. Polinomul dat se identifică cu $(x^2 - 6x - 2)(x^2 - 4x - 1)(x^2 + ax + b)$; $m = -10$, $n = 22$, $p = 14$, $q = 2$; $3 \pm \sqrt{11}$, $2 \pm \sqrt{5}$, $\pm i$.

13. Polinomul dat se identifică cu polinomul care se obține efectuînd $(x^2 - 10x + 28)(x^2 - 2x - 1)(x^2 + px + q)$. Se obțin 6 ecuații, ecuația a patra și a șasea dau p și q, iar celelalte dau cei 4 coeficienți a, b, c, d.

14. a) Polinomul dat se identifică cu polinomul care se obține efectuînd $(x - 1 - i\sqrt{3}) \cdot (x - 1 + i\sqrt{3})(x - \alpha)(x - 2\alpha)(x - \gamma)$. Se obțin 5 ecuații; din primele două se află α și γ, iar ultimele 3 ecuații dau a, b și c.

15. Identificare cu $(x^2 - 6x + 13)(x - u)^2(x^2 + px + q)$.

18. Aceleași derivate pe care le anulează $a + bi$ le anulează și $a - bi$.

19. Se ține seama de teorema de la 3.1.5. b) Este par.

20. Nu. Propoziția este adevărată numai în cazul unei ecuații cu coeficienți reali. c) Numai în cazul unei ecuații cu coeficienți raționali; contraexemplu: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 2 = 0$.

21. Nu. Demonstrația printr-un contraexemplu.

23. a) Două rădăcini întregi și $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. b) Trei rădăcini întregi și $x^3 - x + 2 = 0$. c) Trei rădăcini întregi și $\frac{-1 \pm i\sqrt{47}}{4}$. d) Se împarte prin a^4 și se pune $\frac{x}{a} = y$; rădăcinile: a, $6a$, $-2a$, $-5a$. e) $\sqrt{3}$ apare numai în coeficienții puterilor impare ale lui x; se pune $x = y\sqrt{3}$; rădăcinile: $6\sqrt{3}$, $-7\sqrt{3}$, $\sqrt{3}(1 \pm i)$. f) Trei rădăcini întregi și $2 \pm i$.

24. Propoziția de la 3.3.7 nu se poate aplica aici, fiindcă nu toți coeficienții ecuației sînt întregi; $x = 2$.

25. a) Rădăcina întreagă poate fi numai 1 sau -1, deci $a = -4$ sau $a = 2$. b) a este nedeterminat; ecuația admite rădăcina întreagă r, dacă $a = -\frac{2r^4 + r^3 + 1}{r}$.

26. v. problema precedentă; $p + q = 0$ sau $p - q = 2$.

27. Fie αx^k singurul termen al cărui coeficient nu este rațional, iar $r \in Q$ o rădăcină rațională. $P(r)$ este o sumă în care toți termenii afară de unul sînt raționali, deci...

29. v. problema 21.

30. În propoziția de la 3.3.9 se ia $q = 1$.

31. a) Două rădăcini fracționare și $-2 \pm \sqrt{3}$. b) Două rădăcini fracționare și $-1 \pm i\sqrt{3}$. c) v. problema 23. d); rădăcinile $\frac{m}{2}$, $-\frac{m}{4} - \frac{2m}{3}$, $m(-2 \pm \sqrt{3})$. d) Două rădăcini fracționare și $x^3 + a^2x + a^3 = 0$. e) Trei rădăcini fracționare și $2 \pm \sqrt{3}$.

33. Atenție la coeficientul lui x^3.

34. a) Una dintre necunoscute se elimină prin metoda substituției, apoi se caută rădăcinile raționale ale ecuației obținute.

$$x_1 = 2,\ y_1 = 5,\ x_{2,3} = \frac{47 \pm \sqrt{123}}{7},\ y_{2,3} = \frac{-31 \mp 2\sqrt{123}}{7}.$$

b) v. indicația de la a); $(1, -3)$, $\left(-2, -\frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{1 \pm i\sqrt{51}}{2}, \frac{1 \mp i\sqrt{51}}{2}\right)$; intersecția a două parabole; c) Se folosesc formulele lui Vieta; sînt 6 soluții; $\{x, y, z\} = \{2, 5, -4\}$. d) v. indicația de la c); sînt 24 de soluții, $\{x, y, z, u\} = \left\{-2, 3, \frac{-1 - i\sqrt{19}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}\right\}$. e) Se elimină întîi y^2 pentru a obține o ecuație liniară în y; soluțiile $(0, 1)$, $(-2, 0)$ și două soluții imaginare, intersecția unei elipse cu un cerc. f) $(-2, -1)$, $(-2, -1)$, $\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$, $(1, 3)$; intersecția unei parabole cu o elipsă. g) $(3, 1)$, $(1, 2)$ și două soluții imaginare; intersecția unei elipse cu o parabolă.

35. Nu, căci 1 ar fi divizibil prin numitorul fracției; v. 3.3.9.

36. v. problema 25. Rădăcina nu poate fi decît $\frac{1}{2}$ sau $-\frac{1}{2}$; $m = -2$ sau $m = 1$.

37. $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Se examinează cazul cînd p este par și cazul cînd p este impar; în ambele cazuri, numărătorul este par.

38. a) Dacă se împarte polinomul $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ prin $x - \frac{p}{q}$ folosind schema lui Horner, se obțin coeficienții cîtului: $c_0 = a_0$, $c_1 = \frac{a_0p + a_1q}{q}$, $c_2 = \frac{a_0p^2 + a_1pq + a_2q^2}{q^2}$, ..., $c_{n-1} = \frac{a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}}{q^{n-1}}$. Dacă $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, are loc relația ($\alpha$) de la 3.3.9. Procedînd ca la 3.3.9 b) se arată că a_0 este divizibil cu q, $a_0p + a_1q$ este divizibil prin q^2, ..., $a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_nq^{n-1}$ este divizibil prin q^{n-1}, deci numărătorii fracțiilor care dau c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1} sînt divizibili prin numitorii respectivi. b) Mai mult, fiecare numărător este divizibil printr-o putere a lui q care este cu 1 mai mare decît puterea lui q care figurează în numitorul aceleiași fracții. Rezultă că numerele întregi care se obțin după simplificare sînt divizibile cu q. (Se poate lua cazul $P(x) = a_0x^4 + \ldots + a_4$.)

39. Se folosește formula $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n = 10$. **40.** Primul termen este 4 sau $\frac{-5 \pm i\sqrt{59}}{2}$. **41.** Rația $= 4$. **42.** 5; 7; 9.

43. $(2x + 9)\sqrt{x(x+9)} = 90$; $x = 3$. **44.** $2x^6 + 6x^5 + 7x^4 + 4x^3 + x^2 - 3600 = 0$, x fiind lungimea laturii mai mici. **45.** $x^3 - 24x + 45 = 0$, x fiind măsura razei cilindrului. **46.** $x^3 + 15x^2 - 756 = 0$.

47. Da. Descompunerea în factori liniari este unică (v. 2.2.7); grupînd la un loc cîte doi factori care corespund rădăcinilor imaginar conjugate, se obține descompunerea în factori reali ireductibili. Nici o altă grupare nu va da factori reali (v. Cap. I, probl. 9). *Altfel*: Se reface demonstrația de la 2.2.7.

50. a) Termenii fracțiilor se descompun în factori folosind 3.3.7 și 3.3.9. a) $\frac{2x-1}{x-3}$; b) $\frac{x^2+x+2}{3x-2}$; c) $\frac{4x+3}{3x-2}$. d) Fracția este ireductibilă.

51. Propoziția: Orice polinom cu coeficienți raționali se poate descompune în factori liniari și de gradul II cu coeficienți raționali — este falsă. Ea devine adevărată dacă se adaugă condițiile următoare: rădăcinile reale ale polinomului să fie raționale sau iraționale pătratice, iar dacă polinomul are rădăcina imaginară $a + bi$, a și b^2 să fie raționali.

54. N-are nici un sens. Numerele complexe nu sînt nici pozitive, nici negative.

55. Are același semn cu a_0 oricare ar fi x, căci se descompune în trinoame cu rădăcini imaginare. *Altfel*: v. nota de la 3.4.5.

56. a) Da, pentru orice funcție continuă (v. 4.2.2). b) Depinde de ordinul de multiplicitate a rădăcinii (v. cap. II, probl. 76).

Capitolul IV

1.*. a) $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$. b) $(3, \infty)$. c) $(-\infty, -1)$. d) $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

2. a) $(-\infty, +\infty)$. b) $(0, 5)$, $(5, \infty)$. c) $(-\infty, -\sqrt{5})$. d) $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, \infty)$ e) Se caută rădăcinile raționale ale derivatei; $(-\infty, -2)$, $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $(3, \infty)$. f) Se caută rădăcinile raționale ale derivatei: $(-\infty, -3)$. $(2, 4)$, $(4, \infty)$. g) Se poate trata ecuația care se obține după îndepărtarea rădăcinii duble; $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{-7 \pm 4\sqrt{13}}{3}$.

h) Rădăcinile derivatei sînt $\frac{21 \pm \sqrt{957}}{2}$. Deoarece nu interesează valoarea polinomului pentru aceste valori ale lui x, ci numai semnul lui, se pot lua aproximări foarte grosiere, de exemplu $x_1 = -4$, $x_2 = 25$. Ecuația are cîte o rădăcină reală în intervalele $(-\infty, -4)$, $(-4, 25)$, $(25, \infty)$.

3. Se aplică metoda de la 4.1.4 a) Intersecția părții superioare a hiperbolei $(x-1)^2 - y^2 = 1$ cu parabola $y = 9 - x^2$; $x_1 \in (2, 3)$, $x_2 \in (-2, -3)$.
b) Figura I reprezintă graficul funcției $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 4}$, $x \in [-1, \infty)$; $M(0, 2)$, $A(2, 0)$; în punctul 2 funcția nu este derivabilă, derivata la stînga este $-\sqrt{3}$, derivata la dreapta este $\sqrt{3}$. Rădăcinile sînt abscisele punctelor B, C și D; $x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$, $x_3 \in (2, \infty)$. c) v. figura I. $x \in (1, 2)$, abscisa punctului E. d) Graficul funcției $f(x) = |x^4 - 1|$ se vede în figura II. $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (1, \infty)$.

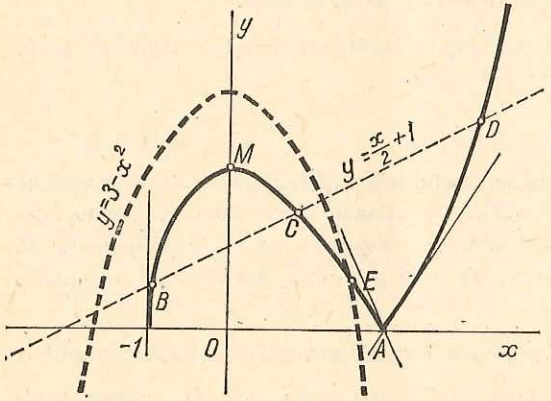

Fig. I.

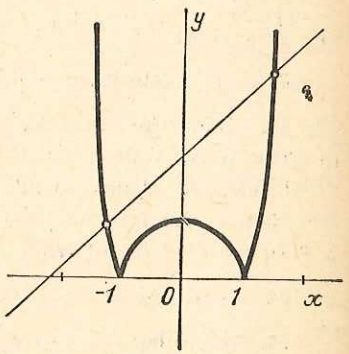

Fig. II.

* Dacă se indică, de exemplu, trei intervale, înseamnă că ecuația are trei rădăcini reale, cîte una în fiecare interval.

4. a) Graficul arată că ecuația admite o rădăcină negativă și două rădăcini pozitive (ramura dreaptă a parabolei $y = 3x^2$ taie curba exponențială $y = 2^x$ în două puncte; $\left(\text{demonstrație: } \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{3x^2} = \infty\right)$. Se constată prin încercări că ele se află, respectiv în intervale $(0, 1)$ și $(7, 8)$. b) $x_1 \in (1, 2)$, $x_2 \in (9, 10)$. c) $x_1 = 0$ și cîte o rădăcină în intervalele $\left(-2k\pi - \frac{\pi}{2}, -2k\pi\right)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ și $\left(-2k\pi, -2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ d) $x_1 = 0$, $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. e) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. f) $x \in (0, 1)$. g) $\in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. h) Cîte o rădăcină reală în intervalele $\ldots \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, adică în intervalele $\left(-k\pi, -(2k-1)\frac{\pi}{2}\right)$ și $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right)$ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

5. a) Se intersectează cele două curbe sau se elimină y și se studiază ecuația $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$; o singură soluție: $x \in (-1, 0)$, $y \in (1, 2)$. b) Analog cu a); două soluții; $x_1 \in (-1, 0)$, $y_1 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x_2 \in (0, 1)$, $y_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

c) x, y și z sînt rădăcinile ecuației $t^3 - 12t + 7 = 0$, care admite cîte o rădăcină în intervalele $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$. Fie t_1, t_2, t_3 rădăcinile acestei ecuații. Soluțiile sistemului sînt toate permutările acestor numere.

6. a) $a < -8$, $(5, \infty)$; $a = -8$, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 8$; $-8 < a < 100$, $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$, $(5, \infty)$; $a = 100$, $x_1 = x_2 = 5$, $x_3 = -4$; $a > 100$, $(-\infty, -1)$. b) $a < 0$, $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; $a = 0$, $x_1 = x_2 = 0$; $x_3, x_4 = \pm\sqrt{2}$; $0 < a < 1$, $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$; $a = 1$, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = 1$; $a > 1$, nici o rădăcină reală. c) Dacă se folosește teorema lui Rolle, ea trebuie aplicată în intervalul $[0, \infty)$. $a < 0$, $x \in (1, \infty)$, $a = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; $0 < a < \frac{1}{4}$, $\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, 1\right)$; $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$; $a > \frac{1}{4}$, nici o rădăcină.

7. Se folosește metoda grafică (4.1.4).

a) $f(x) = \frac{3(x+1)}{x^2 + x + 1}$, $x \in R$ (fig. III), $m(-2, -1)$. $M(0, 3)$. Discuția se poate face și pe cale elementară, folosind realizantul, suma și produsul rădăcinilor.

b) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$, $x \in R \setminus \{1\}$ (fig. IV). $M\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$. c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $x \in R \setminus \{0\}$ (fig. V), $m\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$; d) $f(x) = \frac{3x - 2}{x^3 - 3x + 2}$, $x \in R \setminus \{-2, 1\}$ (fig. VI) $A(0, -1)$.

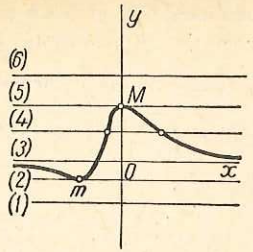

Fig. III.

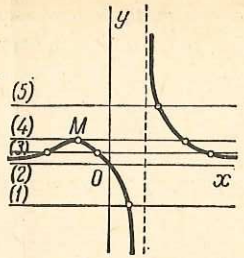

Fig. IV.

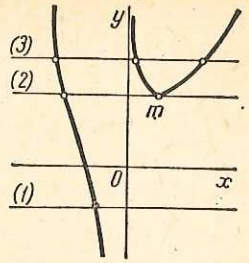

Fig. V.

8. a) Se taie curba $y = e^x - x$ cu dreapta mobilă $y = m$ sau se taie curba $y = e^x$ cu dreapta mobilă $y = x + m$. Discuția: $m < 1$, nici o rădăcină reală; $m = 1$, $x = 0$ (se va afla ecuația tangentei la curba $y = e^x$ în punctul de abscisă zero); $m > 1$, $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$. b) Analog cu a). $m < -1$, $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, \infty)$; $m = -1$, $x = 1$, $m > -1$, nici o rădăcină reală. c) Se taie sinusoida cu dreapta variabilă $y = x + m$. Discuție: $m < 0$, $x \in (0, \infty)$; $m = 0$, $x = 0$; $m > 0$, $x \in (-\infty, 0)$. d) La fel ca problema precedentă. e) Se taie curba $y = \frac{3^x}{x^2}$ cu dreapta variabilă $y = m$; $m \leqslant 0$, nici o rădăcină; $0 < m < \frac{e^2 \ln^2 3}{4}$, $x \in (-\infty, 0)$ ș.a.m.d. f) Oricare ar fi m, $x_1 = 0$; afară de aceasta: $m < 0$, cîte o rădăcină în... $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$..., adică $\left(-k\pi, -(2k-1)\frac{\pi}{2}\right)$ și $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; $m = 0$, $x = k\pi (k \in Z)$; $0 < m \leqslant 1$, cîte o rădăcină în intervalele... $\left(-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$..., adică $\left(-(2k+1)\frac{\pi}{2}, -k\pi\right)$ și $\left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; $m > 1$, cîte o rădăcină în aceleași intervale, la care se adaugă cîte o rădăcină în intervalele $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ și $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. g) v. 4.1.8. (două metode). $m < 0$, $x \in (0, 1)$; $m = 0$, $x = 1$; $0 < m < \frac{1}{e}$, $x_1 \in (1, e)$, $x_2 \in (e, \infty)$; $m = \frac{1}{e}$, $x = e$; $m > \frac{1}{e}$, nici o rădăcină. h) $m \leqslant 0$, $x = 0$; $0 < m < 1$, $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$ $x_3 = 0$; $m \geqslant 1$, $x = 0$.

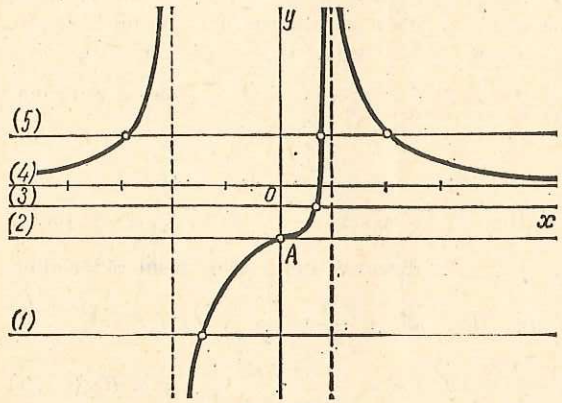

Fig. VI.

i) $m < -\frac{\pi}{2} + 1$, nici o rădăcină; $-\frac{\pi}{2} + 1 \leqslant m \leqslant 0$, $x \in [-1, 0]$; $0 < m \leqslant \frac{\pi}{2} - 1$, $x \in (0, 1]$; $m > \frac{\pi}{2} - 1$, nici o rădăcină.

9. Se procedează ca la 4.1.9. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 8}$ $x \in R \setminus \{2, 4\}$; graficul este cel din figura VII, $m(1, 0)$, $M\left(\frac{5}{2}, -3\right)$, $A\left(-1, \frac{4}{15}\right)$, $B\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $C(3, -4)$, $D\left(5, \frac{16}{3}\right)$.

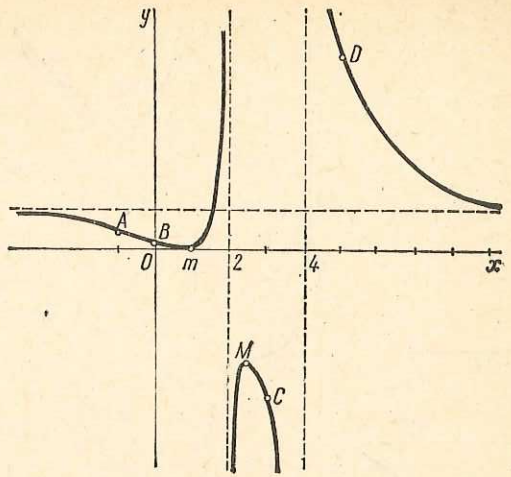

Fig. VII.

a) Interesează restricția funcției f pe intervalul $[-1, 1]$, graficul ei este arcul Am. Discuție: $a < 0$, nici o rădăcină; $a = 0$, $x = 1$; $0 < a \leqslant \frac{4}{15}$, o rădăcină; $a > \frac{4}{15}$, nici o rădăcină. b) Interesează restricția al cărei grafic este arcul situat între axa Oy (punctul B) și asimptota $x = 2$. Discuție: $a < 0$, nici o rădăcină; $a = 0$, $x = 1$; $0 < a < \frac{1}{8}$, două rădăcini; $a = \frac{1}{8}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{10}{7}$; $a > \frac{1}{8}$, o rădăcină. c) Interesează restricția al cărei grafic este cuprins între punctele C și D. Discuție: $a < -4$, $x \in (3, 4)$; $a = -4$, $x = 3$; $-4 < a < \frac{16}{3}$; nici o rădăcină; $a = \frac{16}{3}$, $x = 5$; $a > \frac{16}{3}$, o rădăcină.

10. Figura VIII reprezintă graficul funcției $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi)$, $A(0, 1)$, $B\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ș.a.m.d.

a) Interesează restricția funcției f pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, graficul

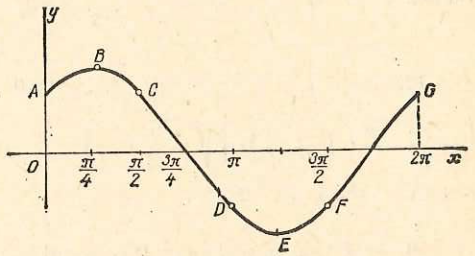

Fig. VIII.

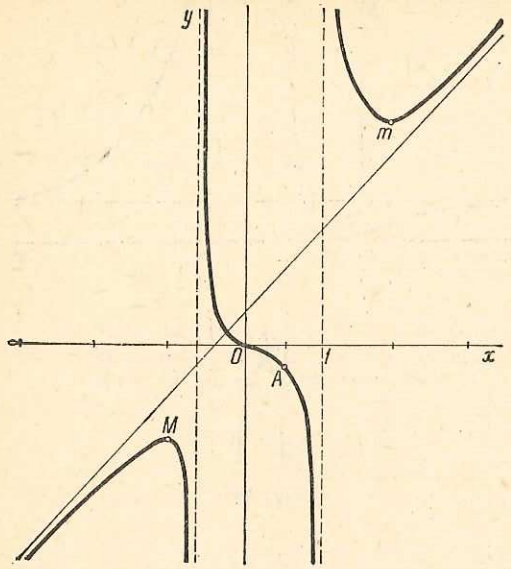

Fig. IX.

ei este arcul ABC. Discuție: $a < 1$, nici o rădăcină; $a = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $1 < a < \sqrt{2}$, două rădăcini; $a = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$; $a > \sqrt{2}$, nici o rădăcină. b) Interesează restricția al cărei grafic este arcul CD. Discuție: $a < -1$ sau $a > 1$, nici o rădăcină; $-1 \leqslant a \leqslant 1$, o singură rădăcină. c) Analog cu a). d) Analog cu b).

11. Se procedează ca la 4.1.9. $f(x) = \frac{5x^3}{5x^2 - 2x - 3}$, $x \in R \setminus \left\{-\frac{3}{5}, 1\right\}$ (fig. IX), $M\left(-1, -\frac{5}{4}\right)$, $m\left(\frac{9}{5}, \frac{243}{80}\right)$, $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{22}\right)$. a) Interesează restricția reprezentată de ramura stîngă a curbei și de ramura mijlocie pînă la punctul O. Discuție: $a < -\frac{5}{4}$ două rădăcini; $a = -\frac{5}{4}$, $x_1 = x_2 = -1$; $-\frac{5}{4} < a < 0$, nici o rădăcină; $a = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $a > 0$, o rădăcină. b) Interesează restricția reprezentată de partea din ramura stîngă situată la dreapta punctului M și din ramura mijlocie. c) $a < -\frac{5}{22}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $a = -\frac{5}{22}$, $x = \frac{1}{2}$; $-\frac{5}{22} < a < \frac{243}{80}$, nici o rădăcină; $a = \frac{243}{80}$, $x_1 = x_2 = \frac{9}{5}$; $a > \frac{243}{80}$, două rădăcini.

12. Cazul $p < 0$, $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$, 3 rădăcini reale, $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}, \infty\right)$; $\Delta = 0$, rădăcină dublă; $\Delta > 0$, o singură rădăcină reală (v. 2.4.9).

13. a) Fie O centrul sferei, C centrul bazei conului, A vîrful conului, A' punctul de pe sferă diametral opus lui A. Notăm cu x măsura algebrică a vectorului $\overrightarrow{OC}$

pe axa OA' (orientată de la O spre A'). Înălțimea conului este $R + x$, oricare ar fi poziția punctului C pe AA'. Ecuația problemei:

$$f(x) = -\frac{x^3 + Rx^2 - R^2x - R^3}{3} = V,$$

$x \in [-R, R]$. Figura X reprezintă graficul funcției definită de aceeași relație, dar pentru $x \in (-\infty, \infty)$; $m(-R, 0)$, $P\left(0, \frac{R^3}{3}\right)$, $M\left(\frac{R}{3}, \frac{32R^3}{81}\right)$, $Q(R, 0)$; interesează restricția acestei funcții pe intervalul $[-R, R]$; graficul ei este arcul $mPMQ$. Curba se taie cu dreapta variabilă $y = V$ ($V \geqslant 0$). Discuție: $0 \leqslant V < \frac{32R^3}{81}$, $x_1 \in \left(-R, \frac{R}{3}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{R}{3}, R\right)$; $V = \frac{32R^3}{81}$, $x_1 = x_2 = \frac{R}{3}$; $V > \frac{32R^3}{81}$, nici o soluție. b) Interesează numai arcul de curbă PMQ. $0 \leqslant V < \frac{R^3}{3}$, o singură soluție $x \in \left(\frac{R}{3}, R\right)$; $\frac{R^3}{3} \leqslant V < \frac{32R^3}{81}$, două soluții ș.a.m.d. c) Pentru a obține o ecuație cu coeficienți numerici, se pune $x = zR$; $x_1 = \frac{R}{4}$, $x_2 = R\frac{-5 + \sqrt{69}}{8}$. *Altfel*: se ia ca necunoscută unghiul format de înălțimea conului cu o generatoare.

14. a) Se notează cu x „distanța" de la centrul cercului la o latură a triunghiului (v. problema 13). $f(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2} = S$, $x \in [-R, R]$. v. figura XI, $A(-R, 0)$, $B(R, 0)$, $M\left(\frac{R}{2}, \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right)$. b) $x_1 = 0$, $x_2 \in (0{,}8\,R, 0{,}9\,R)$.

15. Fie $y = u$ ordonata corzii, $s = f(u) = \frac{a}{b}(b + u)\sqrt{b^2 - u^2}$, $u \in [-b, b]$. Dacă scriem x în loc de u și R în loc de b, expresia diferă de cea din problema precedentă numai prin factorul $\frac{a}{b}$. Graficul are forma din figura XI; $A(-b, 0)$, $B(b, 0)$, $M\left(-\frac{a}{2}, \frac{3ab\sqrt{3}}{4}\right)$.

16. a) Notăm cu x distanța de la vîrful conului la baza superioară a cilindrului; $f(x) = \frac{R^2x^2(h - x)}{h^2} = V$, $x \in [0, h]$. Curba $y = f(x)$ are aceeași alură cu cea din figura X. Extremele sînt O și $M\left(\frac{2h}{3}, \frac{4R^2h}{27}\right)$, curba taie Ox în punctul $Q(h, 0)$; interesează arcul OMQ. b) $x_1 = \frac{h}{3}$, $x_2 = \frac{h}{3}(1 + \sqrt{3})$.

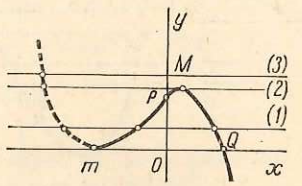

Fig. X.

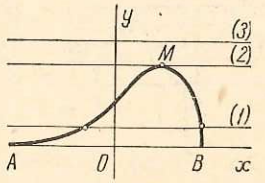

Fig. XI.

17. a) Fie x înălțimea conului; $V = f(x) = \frac{x}{3}(a^2 - x^2)$, $x \in [0, a]$. Discuție: $0 \leqslant V < \frac{2a^3\sqrt{3}}{27} = \alpha$, două soluții; $V = \alpha$, $x_1 = x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $V > \alpha$, nici o soluție. b) $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a(\sqrt{13} - 1)}{4}$. *Altfel*: Se ia ca necunoscută unghiul α format de înălțimea conului cu o generatoare $V = f(\alpha) = \frac{a^3 \cos\alpha \sin^2\alpha}{3}$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Fie x și y, respectiv, raza și generatoarea conului: sistemul, $\pi xy = \pi S$, $\frac{\pi x^2}{3} \cdot \sqrt{y^2 - x^2} = \pi V$ dă ecuația $V = f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{S^2 - x^4}$, $x \in [0, \sqrt{S}]$. Graficul acestei funcții este arcul OMA din figura XII, $M\left(\sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}, \frac{S}{9}\sqrt{2S\sqrt{3}}\right)$ $A(\sqrt{S}\ 0)$. *Altfel*: Se iau ca necunoscute generatoarea x și unghiul α format de generatoarea cu înălțimea: $V = \frac{S\sqrt{S}}{3}\sqrt{\cos^2\alpha \sin\alpha}$.

19. a) Sistemul $x^2y = V$, $2x^2 + 4xy = S$ dă ecuația $f(x) = \frac{2x^3 + 4V}{x} = S$, $x \in (0, \infty)$. b) Graficul acestei funcții este ramura dreaptă a curbei din figura XIII, $m(\sqrt[3]{V}, 6\sqrt[3]{V^2})$. În ecuația $f(x) = \frac{17\sqrt[3]{V^2}}{2}$ se pune $x = z\sqrt[3]{V}$; $x_1 = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt[3]{V}(\sqrt{65} - 1)}{4}$. Valorile corespunzătoare ale lui y se află din relația $x^2y = V$. *Altfel*: Ecuația $f(x)) = S$ se rezolvă în raport cu y și se construiește curba $V = \frac{1}{4}(Sx - 2x^3)$; v. problema următoare.

20. a) Ecuațiile $2\pi x^2 + 2\pi xy = \pi S$, $\pi x^2 y = \pi V$ dau $f(x) = \frac{1}{2}(Sx - 2x^3) = V$, definită pentru valorile lui x pentru care $f(x) = V \geqslant 0$. Graficul acestei funcții este arcul OMA din figura XIV. $M\left(\sqrt{\frac{S}{6}}, \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6}}\right)$, $A\left(\sqrt{\frac{S}{2}}, 0\right)$. b) În ecuația

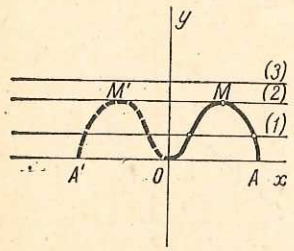

Fig. XII.

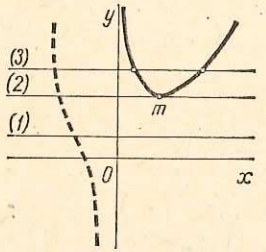

Fig. XIII.

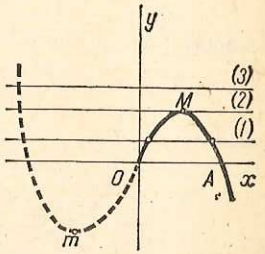

Fig. XIV.

$Sx - 2x^3 = \frac{7S\sqrt{S}}{27}$, se pune $x = z\sqrt{S}$; $x_1 = \frac{\sqrt{S}}{3}$, $x_2 = \frac{(\sqrt{15} - 1)\sqrt{S}}{6}$. *Altfel*: Ecuația $f(x) = V$ se rezolvă în raport cu S și se construiește curba $S = \frac{2x^3 + 2V}{x}$ (v. problema precedentă).

21. Notăm cu x_c valoarea rădăcinii dată de metoda coardei și cu x_t sau x_i valoarea dată de metoda tangentei aplicată, respectiv, punctului a sau b ($a < b$).

a) $x_c = 2{,}4903$. $x_t = 2{,}4909$. b) $x_c = 2{,}09425$, $x_t = 2{,}09457$. c) $x_c = 0{,}6517$, $x_t = 0{,}6539$.

22. În problemele în care intervin funcții trigonometrice, trebuie luat ca unitate de măsură pentru arce radianul. Pentru transformarea gradelor în radiani și invers, se folosesc tabele, de exemplu: Tabele matematice uzuale, Ed. tehnică 1965, Tabela IV. 1 (pag. 141). Logaritmii naturali se află de asemenea cu ajutorul unor tabele speciale, de exemplu în Tabelele citate: Tabela II. 4 (pag. 62—63) sau Tabela II. 6 (pag. 64).

a) $x_c = 154°28'$, $x_t = 154°29'$. b) $x_c = 42°20'3''$, $x_t = 42°20'48''$. c) $x_c = 1{,}823$, $x_t = 1{,}826$. d) $x = 1$, $x_c = -1{,}872$, $x_t = -1{,}874$.

23. $x^3 - 6x^2 + 10 = 0$; $x_c = 1{,}5216$; $x_t = 1{,}5222$.

24. $10x^3 + 25x^2 - 64 = 0$; $x_c = 1{,}2979$; $x_t = 1{,}2981$.

25. Volumul segmentului sferic este $v = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ unde R este raza sferei, iar h înălțimea segmentului, $x^3 - 3R^2x + 2R^3\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 0$, unde x este distanța de la centrul sferei pînă la planul de secțiune.

a) $x_c = 0{,}2265\,R$, $x_t = 0{,}2259\,R$, $x = 0{,}2262\,R\left(\pm\frac{3R}{10^4}\right)$.

b) $x_c = 0{,}348\,R$, $x_t = 0{,}346\,R$, $x = 0{,}347\,R\left(\pm\frac{R}{10^3}\right)$.

26. Se egalează greutatea sferei cu greutatea apei dislocuite, apa dislocuită avînd forma de segment sferic de înălțime x. Pentru volumul segmentului, v. problema precedentă; $10x^3 - 30x^2 + 28 = 0$; $x = 1{,}27346\,R$.

27. Fie AB diametrul și AC coarda, măs. $\widehat{BC} = x$ (radiani); partea ABC se compune din triunghiul AOC și sectorul circular BOC; $x + \sin x = \frac{\pi}{2}$.

28. Fie AB diametrul, CD coarda, măs. $\widehat{BD} = x$ (radiani); aria porțiunii cuprinsă între AB și CD se descompune în două sectoare circulare egale, BOD și AOC, și triunghiul ODC; $x + \sin x \cos x = \frac{\pi}{4}$ sau, punînd $2x = u$, $u + \sin u = \frac{\pi}{2}$.

29. Notăm cu $2x$ unghiul la centru corespunzător; $\cos x - x = 0$, $x_c = 42°20'43''$; $x_t = 42°20'8''$.

30. Aceeași notație ca la problema precedentă; $2 \sin x - x = 0$, $x_c = 108°36'5''$, $x_t = 108°36'27''$.

31. $\operatorname{tg} x - 2x = 0$; $x_c = 66°46'8''$, $x_t = 66°47'5''$.

32. Aceeași ecuație ca la problema **31**.

Capitolul V

3. b) Nu, căci există un triplet (x, y, z) astfel încît $(x \top y) \top z \neq x \top (y \top z)$.

7. a) Fie $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Ecuația devine: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Așadar, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. b) Se pune $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Se obține: $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

9. b) Sistemul dat devine:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

10. $\begin{Vmatrix} x & y \\ 2y & x \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} x' & y' \\ 2y' & x' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} xx' + 2yy' & xy' + x'y \\ 2x'y + 2xy' & 2yy' + xx' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x'' & y'' \\ 2y'' & x'' \end{Vmatrix}$ unde $x'' = xx' + 2yy'$ și $y'' = xy' + x'y$ $(x'' \in Q,\ y'' \in Q)$.

11. Fie $x = a + b\sqrt{5}$ și $x' = a' + b'\sqrt{5}$, cu $a - 5b^2 = 1$ și $a'^2 - 5b'^2 = 1$. Avem $x \cdot x' = aa' + 5bb' + (ab' + a'b)\sqrt{5}$. $(aa' + 5bb')^2 - 5(ab' + a'b)^2 = a^2a'^2 + 10aa'bb' + 25b^2b'^2 + 5a'^2b'^2 - 10aa'bb' - 5a'^2b^2 = a^2(a'^2 - 5b'^2) - 5b^2(a'^2 - 5b'^2) = a^2 - 5b^2 = 1$. Deci $x \cdot x' \in M$.

12. Se observă că $x \top y = (x - 3)(y - 3) + 3$. **13.** a) Da. b). Nu.

15. b) Nu, căci există un triplet (x, y, z) de elemente din E astfel încît $x \top (y \top z) \neq (x \top y) \top z$. Se va preciza un asemenea triplet.

16. b) Se obține $(x \top y) \top z = x \top (y \top z) = 36xyz + 18xy + 18xz + 18yz + 9x + 9y + 9z + 4$. c) $e = -\frac{1}{3}$, d) $x = \frac{-4 - 9a}{18a + 9}, \left(a \neq -\frac{1}{2}\right)$.

24. a) Avem:

$$[A \cup (B \cup A)] \cup [B \cup (B \cup A)] = [A \cup (A \cup B)] \cup [(B \cup B) \cup A] =$$
$$= [(A \cup A) \cup B] \cup (B \cup A) = (A \cup B) \cup (A \cup B) = A \cup B.$$ b) $A \cap B$.

25. b) Elementele e, a, b, c se pot considera funcțiile definite pe $\{1, 2\}$ cu valori în $\{1, 2\}$ iar legea de compoziție, compunerea.

34. c) $e = 2$. **35.** c) $e = a$.

37. b) Avem de exemplu: $\hat{3} \top \hat{4} = (\hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4}) + (\hat{4} \cdot \hat{3}) + \hat{4} \cdot \hat{4} + \hat{4} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} = (\hat{3} \cdot \hat{3}) \cdot \hat{4} = \hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{1}$. Deci $\hat{3} \top \hat{4} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{1} + \hat{4} = (\hat{1} + \hat{2}) + (\hat{1} + \hat{4}) = \hat{3} + \hat{4} = \hat{3}$. Așadar, $\hat{3} \top \hat{4}$. La fel, se arată că $\hat{0} \top \hat{4} = \hat{0}$, $\hat{1} \top \hat{4} = \hat{1}$, $\hat{2} \top \hat{4} = \hat{2}$, $\hat{4} \top \hat{4} = \hat{4}$.

38. c) Se va folosi 5.1.25. **42.** a) Funcția $f : R \to R$ este inversabilă căci este bijectivă. Funcția g este inversabilă căci este bijectivă. b) $f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$. $g^{-1}(x) = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{2}{3}$.

43. Exemplu: $(3 + 2\sqrt{2})^{-1} = 3 - 2\sqrt{2}$. **44.** a) $e = \frac{7}{3}$. b) $x' = \frac{-35 + 8x}{9(x - 2)}$, $x \neq 2$.

45. Avem: $(\hat{3} \cdot x) + \hat{4} = \hat{9} \Rightarrow (\hat{3} \cdot x) + \hat{4} + (-\hat{4}) = \hat{9} + (-\hat{4}) \cdot (\hat{3} \cdot x) + \hat{0} = \hat{5} \Rightarrow \hat{3} \cdot x = \hat{5} \Rightarrow \hat{3}^{-1} \cdot (\hat{3} \cdot x) = \hat{3}^{-1} \cdot \hat{5} \Rightarrow (\hat{3}^{-1} \cdot \hat{3}) \cdot x = \hat{4} \cdot \hat{5} \Rightarrow \hat{1} \cdot x = \hat{9} \Rightarrow x = \hat{9}$.

Verificare: $(\hat{3} \cdot \hat{9}) + \hat{4} = \hat{5} + \hat{4} = \hat{9}$.

46. a) Avem: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ X\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow e \circ X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

48. b) $\begin{Vmatrix} x & 8y \\ y & x \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} x & -8y \\ -y & x \end{Vmatrix}$

64. a) $x^5 = x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot x^3 = x^2 \cdot e \Leftrightarrow x^3 = e$.

65. a) Din $x^2 = e$, rezultă $x = x^{-1}$. Avem: $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$.

68. c) Pentru ușurința raționamentelor se vor întocmi tabelele legilor de compoziție. d) Se vor nota convenabil elementele celor 3 structuri cu aceleași simboluri și se va observa că se obțin tabele identice. e) Se va observa că în toate cele trei structuri este adevărată egalitatea $x^2 = e$. Există un grup cunoscut cu patru elemente în care nu are loc o relație analoagă.

71. a) Este indicată forma trigonometrică a numerelor complexe, pentru exprimarea rădăcinilor.

75. Dacă cele două inele ar fi izomorfe atunci ar exista $f : M \to P$ astfel încît $f(1) = 1$, $f(2) = f(1) + f(1) = 2$ și $f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = f(2) = 2$.

Așadar, $f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$, dar $\pm\sqrt{2} \in P$.

79. Înmulțind prima ecuație cu 3, obținem $\hat{9} \cdot x = \hat{9}$, cu soluțiile $x = \hat{1}$, $x = \hat{5}$, $x = \hat{9}$. Înlocuindu-se în ecuația a doua se află y. *Soluție.* $x = \hat{1}$, $y = \hat{2}$. Metoda substituției nu se poate aplica, deoarece $\hat{3}$ și $\hat{4}$ sînt inversabile.

84. a) Se va înlocui x pe rînd cu $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ și se va obține $x^5 + \hat{4}x = \hat{0}$. Explicația stă în faptul că în demonstrația că un polinom cu coeficienți numerici de gradul n este identic nul, cînd toți coeficienții sînt nuli, se presupunea existența a $n + 1$ valori distincte. În clasele de resturi modulo 5 nu există decît 5 valori distincte. b) Se va reface demonstrația dată în prima parte a manualului. Se mai folosește faptul că în inelul claselor de resturi modulo 5 nu sînt divizori ai lui 0. **85.** Există divizori ai lui 0.

88. Exemplu de divizori ai lui 0:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

89. Nu. **92.** a) $\{x \in Rx = a + b\sqrt{c},\ a \in Q,\ b \in Q,\ c \in Q,\ \sqrt{c} \notin Q\}$; b) $\{x \in R |\ x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ a \in Q,\ b \in Q,\ c \in Q,\ d \in Q\}$.

93. Se va ține seama că într-un corp nu avem divizori ai lui 0. **95.** c) Se va folosi punctul b) și problema 94 punctul c). Avem $x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ și deci $f(a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_n) = f(0)$ de unde $a_0 x_0^{-n} + a_1 x_0^{-n-1} + \ldots + a_n = 0$.

99. a) $\hat{4}$. b) $\hat{3}$. **100.** a) Deoarece $\delta(c)$ este soluție a ecuației $x^2 = c$, avem $(\delta(c))^2 = c$. $x^2 = c \Leftrightarrow x^2 - c = 0 \Leftrightarrow x^2 - [\delta(c)]^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \delta(c))\ (x + \delta(c)) = 0 \Leftrightarrow x = \delta(c)$ sau $x = -\delta(c)$. b) Se reface demonstrația cunoscută în cazul ecuației de gradul doi cu coeficienți reali. c) Avem $\delta(b^2 - 4ac) = \sqrt{b^2 - 4ac}$ și formula devine formula cunoscută. d) Ecuația $x^2 = b^2 - 4ac$ devine $x^2 = \hat{1}$ cu soluțiile $x = \hat{1}$ și $x = -\hat{1} (x = \hat{4})$. Așadar, $x_{1,2} = \dfrac{-\hat{3} \pm \hat{1}}{\hat{2} \cdot \hat{2}} = \dfrac{-\hat{3} \pm \hat{1}}{\hat{2} \cdot \hat{2}}$,

$$x_1 = (-\hat{2}) \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{2}, \quad x_2 = (-\hat{4}) \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{1} \cdot \hat{4} = \hat{1}.$$

Bibliografie

Pentru aprofundarea problemelor conținute în acest manual recomandăm elevilor să consulte următoarele lucrări:

1. Matei, Nazarie, Georgescu-Buzău, E. — *Relații, funcții, structuri algebrice.* București, Editura didactică și pedagogică, 1973.

2. Gautier, C., Girard, G., Lentin, A. — *Alef$_0$-Algebră. Vol. I Mulțimi, aplicații, numere reale; vol. II Funcții și ecuații numerice,* București, Editura didactică și pedagogică, 1973.

3. Stamate, I., Stoian, I. — *Culegere de probleme de algebră.* București, Editura didactică și pedagogică, 1971.

4. * * * — „*Gazeta matematică*", *Seria B.*

5. Galbură, Gh. — *Introducere în algebră,* București, Editura tehnică, 1969.

Cuprins

Capitolul I. **Polinoame**

1.1. Precizări și completări 3
1.2. Polinoame identice 8
1.3. Împărțirea polinoamelor 15

Capitolul II. **Ecuații algebrice cu coeficienți complecși**

2.1. Teorema lui Bézout 25
2.2. Descompunerea polinoamelor în factori liniari. Numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice..... 29
2.3. Relații între coeficienți și rădăcini 39
2.4. Rădăcini multiple 50

Capitolul III. **Ecuații cu coeficienți reali, raționali, întregi**

3.1. Rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali 69
3.2. Rădăcinile iraționale pătratice ale unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali 75
3.3. Rădăcinile iraționale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi 77
3.4. Descompunerea polinoamelor cu coeficienți reali 86

Capitolul IV. **Rezolvarea numerică a ecuațiilor**

4.1. Separarea rădăcinilor prin metoda grafică..... 96
4.2. Separarea rădăcinilor pe baza teoremei lui Rolle 106
4.3. Aproximarea rădăcinilor reale ale unei ecuații 113

Capitolul V. **Structuri algebrice**

5.1. Legi de compoziție interne 125
5.2. Structuri algebrice: grup, inel, corp 149

Indicații și răspunsuri 191
Bibliografie 215

Nr. colilor de tipar : 13,5
Tiraj : 116 580 ex.
Bun de tipar : 15.X.1976

Com nr. 60 525/23 320
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.